Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Mgr. Emília Miťková

Autoreferát dizertačnej práce

ROZVOJ ALGEBRAICKÉHO MYSLENIA U ŽIAKOV ZÁKLADNÝCH A STREDNÝCH ŠKÔL

Na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiae doctor
V odbore doktorandského štúdia:
9.1.8 Teória vyučovania matematiky

Bratislava 2009

Dizertačná práca bola vypracovaná v internej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: Mgr. Emília Miťková
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: Doc. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Oponenti: Prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.
KM PF UMB
Ružová 13
917 11 Banská Bystrica

Doc. RNDr. Viera Uherčíková, PhD.
KAGDM, FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Doc. RNDr. Matúš Harminc, CSc.
ÚMV PF UPJŠ
Jesenná 5
041 54 Košice

Autoreferát bol zverejnený na stránkach katedry vo februári 2009.
Informácie o konaní obhajoby: emilia.mitkova@gmail.com

Predhovor

Predložená dizertačná práca sa venuje rozvoju algebraického myslenia žiakov základných a stredných škôl. Algebraické myslenie vstupuje do mnohých úloh, ktoré sú žiakom základných a stredných škôl predkladané. Abstrakcia, zovšeobecnenie, chápanie písmena v zmysle čísla, reprezentácia vzťahov pomocou algebraickej symboliky, strategické úpravy výrazov pri riešení rovníc, ... predstavujú iba niekoľko konkrétnych prípadov, kedy je algebraické myslenie pre žiaka dôležité. Schopnosť použiť algebraickú symboliku na modelovanie reálnej situácie, dopracovať sa riešením matematického modelu k hľadanej číselnej hodnote a túto vypočítanú hodnotu vedieť interpretovať v pôvodnom reálnom kontexte nachádzame najmä v problematike slovných úloh vedúcich k riešeniu lineárnou rovnicou (skrátene len slovné úlohy).

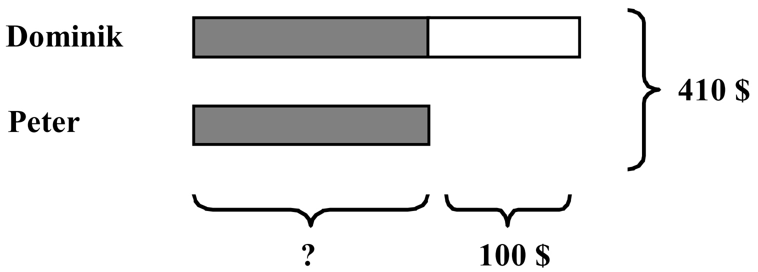
Riešenie slovných úloh sa vo všeobecnosti považuje za náročné. Autori učebníc a aj učitelia sa rôznymi spôsobmi snažia riešenie slovných úloh žiakom sprístupniť. V Singapúre sa pri vyučovaní slovných úloh úspešne používa „metóda modelu“, ktorá ponúka žiakovi vizualizáciu vzťahov. Použitie obdĺžnikov v „obrázkovej rovnici“ je menej abstraktné ako použitie písmena v algebraickom zápise rovnice. Riešením obrázkových rovníc sa žiaci sústredia na vzťahy zadané v slovnej úlohe. Neskôr, keď je obdĺžnik nahradený známou hodnotou (číslom) alebo neznámou („x“), pracujú už žiaci s lineárnymi rovnicami.

Cieľom nášho výskumu bolo skúmať vplyv použitia vizuálneho modelu ako dodatočnej reprezentácie pri riešení slovných úloh vedúcich k lineárnej rovnici. Použitý vizuálny model korešponduje s „obrázkovou rovnicou“, ktorá sa používa pri vyučovaní slovných úloh v Singapúre.

Pretože v experimentálnom výskume overujeme možnosť použitia novej metódy vyučovania slovných úloh, volíme výskum kvantitatívny. Pri realizácii výskumu sme spolupracovali celkovo so

16 vyučujúcimi matematiky (na základných školách i osemročných gymnáziách).

Dominik a Peter dostali spolu 410 dolárov. Dominik dostal o 100 dolárov viac ako Peter. Koľko dolárov dostal Peter?
2 jednotky = 410 – 100 \$ = 310 \$
1 jednotka =   \$
Peter dostal ___________ dolárov.



Obr. 1 „Pictorial equation" – vizuálny model používaný pri vyučovaní slovných úloh v Singapúre

Úvod

Jedným z prvých krokov pri spracovaní témy dizertačnej práce (Rozvoj algebraického myslenia žiakov základných a stredných škôl) bola analýza samotného pojmu „algebraické myslenie". Použitie tohto pojmu didaktikmi matematiky je veľmi rôznorodé a odlišuje sa v závislosti od zvoleného pohľadu. V prvej kapitole uvedieme viaceré ukážky vymedzenia pojmu algebraické myslenie, pričom sa sústredíme na tie, ktoré spájajú algebraické myslenie s prechodom medzi aritmetikou a algebrou. Algebraické myslenie je podľa nášho názoru viac ako iba používanie „x“, „y“. Komplexnejší pohľad vhodne dokumentujú tabuľky (aspektov a zložiek algebraického myslenia) uvedené v texte.

Druhá kapitola sa venuje miestu algebraického myslenia v základných pedagogických dokumentoch platných na Slovensku. V Štátnom vzdelávacom programe druhého stupňa základných škôl a v Štátnom vzdelávacom programe gymnázií sa zameriame na ciele, okruhy a témy, ktoré s algebraickým myslením súvisia. V závere druhej kapitoly porovnáme súčasný vzdelávací program so vzdelávacím štandardom a učebnými osnovami platnými pred školským rokom 2008/09.

V tretej kapitole upresníme, akým úlohám sa v dizertačnej práci budeme venovať. Pozrieme sa na algebraické myslenie v *slovných úlohách*, predovšetkým na reprezentáciu vzťahov a na zostavenie rovnice. Porovnáme vyučovanie slovných úloh na Slovensku a v Singapúre. Vyučovaniu slovných úloh použitím „obrázkových rovníc“ sa v súčasnosti venuje Swee Fong Ng. Vizualizácia , ktorá je v tejto metóde dôležitá, sa v súvislosti s rozvojom algebraického myslenia objavuje nielen v „obrázkových rovniciach“ ale aj v prácach iných autorov (uvedieme štyri ukážky).

Poznanie dejín algebry nám môže pomôcť v lepšom pochopení postupov aj zdôvodnení konkrétnych žiakov. Pohľad na mnohé ťažkosti (ako napríklad používanie abstraktných symbolických zápisov v algebre) sa môže zmeniť práve oboznámením sa s dejinami. V štvrtej kapitole sa zameriame len na dve skutočnosti z rozsiahlych dejín algebry, ktoré sú pre našu dizertačnú prácu dôležité: na vzájomné prepojenie geometrie a algebry, a na pomalý a postupný príchod algebraickej symboliky.

Piata kapitola sa týka prístupu učiteľov, pretože od nich vo veľkej miere závisí, či žiak algebraickú symboliku príjme ako niečo užitočné, vítané, čo mu pomáha prehľadne, skrátene a všeobecne zapisovať jeho myšlienky, alebo je algebraická symbolika pre žiaka „neznámy jazyk, ktorému ani nerozumie, ani ho nevie používať". V tejto súvislosti uvedieme mechanizmus poznávacieho procesu (označovaný aj ako teória separovaných a generických modelov) a didaktický konštruktivizmus.

V šiestej kapitole sformulujeme cieľ a hypotézy výskumu. Celkovo sme sformulovali tri hypotézy, týkajúce sa vplyvu vizuálneho modelu z hľadiska úspešnosti riešenia, z hľadiska výskytu algebraickej symboliky, a z hľadiska správnosti zápisu rovnice Metodológia, ktorú v experimente použijeme, nám umožní vykonať viacero porovnaní pri overovaní hypotéz výskumu.

Siedma kapitola sa zaoberá predexperimentom. Jeho cieľom bolo vybrať a doladiť formuláciu úloh hlavného výskumu. Uvedieme formuláciu úloh predvýskumu a vykonáme analýzu ich riešení, ktoré sme získali samozrejme na menšej vzorke žiakov než na akej prebehol samotný experiment..

Návrhy úprav vyplývajúce zo záveru predexperimentu zohľadníme v ôsmej kapitole. V analýze riešení experimentu sa v každej úlohe samostatne venujeme vyhodnoteniu údajov súvisiacich s hypotézami výskumu. Okrem kvantitatívnych ukazovateľov uvedieme aj konkrétne ukážky riešení žiakov, ktoré nás pri vyhodnocovaní zaujali.

Cieľom deviatej kapitoly je overenie hypotéz. Vzhľadom na zvolenú metodológiu uvedieme pri každej hypotéze dve porovnania.

Cieľ dizertačnej práce, hypotézy a metodológia

Cieľ dizertačnej práce

Cieľom dizertačnej práce je skúmať vplyv použitia vizuálneho modelu ako dodatočnej reprezentácie pri riešení slovných úloh vedúcich k lineárnej rovnici s jednou neznámou. Použitý vizuálny model korešponduje s „obrázkovou rovnicou" uvedenou v (Cai et all 2005).

Hypotézy dizertačnej práce

Predpokladáme pozitívny vplyv uvedenia vizuálneho modelu a formulujeme tieto hypotézy:

Hypotéza H1:
Vizuálny model napomôže správnemu riešeniu úlohy.

Hypotéza H2:
Vizuálny model zvýši výskyt použitia algebraickej symboliky.

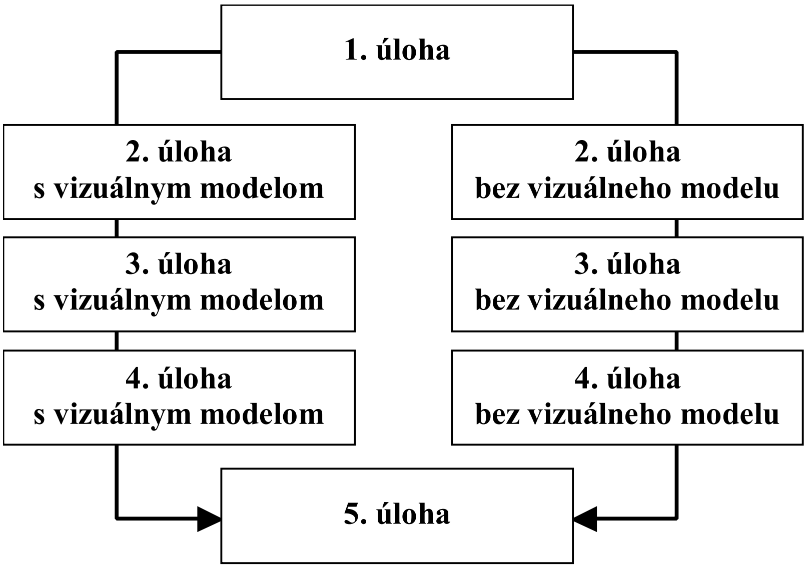
Hypotéza H3:
Vizuálny model napomôže správnemu používaniu algebraickej symboliky pri zapísaní vzťahu.

Pri zvolení druhu výskumu máme na výber z dvoch základných možností: výskum kvalitatívny a výskum kvantitatívny. Pretože nám ide o overenie možnosti použitia novej metódy vyučovania rovníc, zvolili sme výskum kvantitatívny. Umožní nám skúmať väčšiu vzorku žiakov a viac objektívne.

Podľa klasifikácie výskumných metód si volíme kvantitatívny experimentálny výskum. Pred hlavným experimentom vykonáme na menšej vzorke žiakov predexperiment (v odbornej literatúre niekedy označovaný ako *pilot study*).

Experiment bude mať dve komponenty. Jedna je priama (úlohy 2, 3 a 4), v ktorých žiakom v experimentálnej skupine zadáme úlohy s vizuálnym modelom a na kontrolnej skupine budeme sledovať, ako žiaci riešia tieto úlohy bez zadania vizuálneho modelu.

Dôležitejšia však bude komponenta nepriama, tvorená úlohami 1 a 5. Tieto úlohy majú analogickú matematickú stavbu. Jednu žiak rieši na začiatku, jednu na konci. Čo budeme sledovať je zmena úspešnosti žiackych riešení v závislosti od toho, či úlohy ktoré žiaci riešili medzi prvou a piatou úlohou (teda úlohy 2, 3 a 4) obsahovali alebo neobsahovali vizuálny model. Tak v experimentálnej skupine budú úlohy 1 a 5 oddelené trojicou úloh obsahujúcou vizuálny model kým v kontrolnej skupine budú úlohy 1 a 5 oddelené trojicou úloh bez vizuálneho modelu. (pozri Obr. 2)



Obr. 2 Úlohy zadané v rámci experimentu.
Vľavo experimentálna skupina, vpravo kontrolná skupina.

Overenie hypotéz

Vzhľadom na uvedenú metodológiu osobitne vyhodnocujeme celkový vplyv vizuálnych modelov na riešenia, a špeciálne nás zaujíma zmena, ktorá nastala medzi prvou a piatou úlohou, pod vplyvom úloh 2, 3, 4 ktoré obsahovali vizuálny model. Vykonáme teda dve porovnania:

1. Porovnanie riešení žiakov pri zadaní s vizuálnym modelom a bez vizuálneho modelu. (Druhá, tretia a štvrtá úloha. Počet žiakov n = 389.)
2. Porovnanie štatistických vyhodnotení prvej a piatej úlohy. Počet žiakov n = 460.)

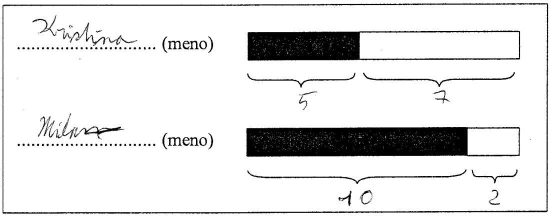
Hypotéza H1:
Vizuálny model napomôže správnemu riešeniu úlohy.

<u>H 1.1 Vyhodnotenie druhej, tretej a štvrtej úlohy</u>

Druhá, tretia a štvrtá úloha boli tri úlohy, v zadaní ktorých 191 žiakov malo uvedený vizuálny model a 198 žiakov vizuálny model uvedený nemalo. Ak u každého žiaka vyhodnotíme, <u>koľko</u> úloh z tejto trojice vyriešil správne, dostaneme nižšie uvedené rozdelenia.

A)
V tomto prípade v tretej úlohe neuznávame za správne riešenie, keď žiak IBA dokreslil do vizuálneho modelu číselné hodnoty, aj keď tieto boli správne. Pozri obr. 3.

ÚLOHA 3:
Milan a Kristína dostali od svojej tety balíček cukríkov. Milan hneď balíček otvoril, niekoľko cukríkov z neho dal sestre Kristíne a pre seba si z balíčka vzal dvakrát viac ako dal sestre. Kristíne sa samozrejme takéto delenie nepáčilo, vzala bratovi balíček a zvyšné cukríky rozdelila tak, že k svojim pridala 7 cukríkov a k Milanovým 2 cukríky. Tak mali na konci obaja rovnako.
Koľko cukríkov si z balíčka vzal Milan na začiatku?



Obr. 3 Riešenie tretej úlohy žiakom z experimentálnej skupiny.

	0	1	2	3
S vizuálnym modelom	21 žiakov	41 žiakov	67 žiakov	62 žiakov
Bez vizuálneho modelu	30 žiakov	41 žiakov	66 žiakov	61 žiakov

Rozdelenia sú normálne, je možné vykonať porovnanie priemerov t-testom (Wimmer 1993). Hodnota testovacieho kritéria je 0,894511. To pri počte n = 389 znamená, že na hladine významnosti α = 0,185805 môžeme zamietnuť hypotézu o rovnosti priemerov v prospech hypotézy, že priemer u žiakov s uvedeným vizuálnym modelom je vyšší.

B)
V tomto prípade v tretej úlohe uznávame ako správne aj tie riešenia, v ktorých je správna číselná hodnota IBA dokreslená do vizuálneho modelu. Rozdelenie počtu správne vyriešených úloh pri zadaní s vizuálnym modelom je

	0	1	2	3
S vizuálnym modelom	21 žiakov	36 žiakov	51 žiakov	83 žiakov

(Rozdelenie riešení bez vizuálneho modelu je samozrejme rovnaké ako sme uviedli v prípade A. Tu sa v dôsledku toho, že akceptujeme viac riešení ako správne, značne zvýši úspešnosť riešení pri zadaní vizuálneho modelu). Priemerný počet správne vyriešených úloh je **2,0262**. Rozdelenie však nie je normálne, nemôžeme teda na porovnanie priemerov 2,0262 a 1,7980 použiť t-test. Ale už aj kvalitatívny pohľad na hodnoty ukazuje, že skupina s vizuálnym modelom je výrazne úspešnejšia.

Zároveň:
Úspešnosť druhej úlohy pri zadaní s uvedeným vizuálnym modelom je **71,73 %**, bez vizuálneho modelu **61,62 %**.
Úspešnosť tretej úlohy pri zadaní s uvedeným vizuálnym modelom je v prípade A **35,11 %**, v prípade B **48,44 %**, bez vizuálneho modelu **45,53 %**.
Úspešnosť štvrtej úlohy pri zadaní s uvedeným vizuálnym modelom je **69,78 %**, bez vizuálneho modelu **64,68 %**.

Preto možno predbežne konštatovať, že vizuálny model prispieva k úspešnosti riešenia. Z tohto celkového vyhodnotenia však nie je jasné, či vizuálny rozvíja algebraické myslenie, alebo iba uľahčuje orientáciu v úlohe, čím zvyšuje úspešnosť riešenia podobne ako kalkulačka Aby sme mohli rozhodnúť túto alternatívu, postavili sme náš experiment tak, že v ňom testujeme aj zmenu, ktorú riešenie úloh s vizuálnym modelom spôsobí v úlohách bez tohto modelu.

H1.2 Vyhodnotenie prvej a piatej úlohy

Z dôvodu lepšej zrozumiteľnosti textu sú žiaci, ktorí mali v zadaní uvedený aj vizuálny model označení ako *experimentálna skupina*. Žiaci, ktorí v zadaní nemali uvedený vizuálny model tvoria *kontrolnú skupinu*.

Správne riešenie prvej úlohy uviedlo **50,67 %** žiakov experimentálnej skupiny a **55,32 %** žiakov kontrolnej skupiny.

V piatej úlohe uviedlo správne riešenie **35,56 %** žiakov experimentálnej skupiny a **31,49 %** žiakov kontrolnej skupiny.

Teda napriek tomu, že experimentálna skupina bola podľa výsledkov prvej úlohy mierne slabšia ako kontrolná, pri piatej úlohe dosiahli vyššiu úspešnosť.

Pri zohľadnení výsledkov v bode H1.1 ***môžeme prijať*** hypotézu H1: Vizuálny model napomôže správnemu riešeniu úlohy.

Hypotéza H2:
Vizuálny model zvýši výskyt použitia algebraickej symboliky.

H2.1 Vyhodnotenie druhej, tretej a štvrtej úlohy

Porovnáme 191 žiakov, ktorí v zadaní druhej, tretej a štvrtej úlohy mali v zadaní uvedený vizuálny model, a 198 žiakov, ktorý tento model v zadaní uvedený nemali. Ak u každého žiaka vyhodnotíme, v koľkých úlohách (aspoň raz) použil algebraickú symboliku, dostaneme tieto rozdelenia:

	0	1	2	3
S vizuálnym modelom	53 žiakov	49 žiakov	56 žiakov	33 žiakov
Bez vizuálneho modelu	31 žiakov	50 žiakov	71 žiakov	46 žiakov

Rozdelenie u žiakov, ktorí mali v zadaniach uvedený vizuálny model sa odlišuje od normálneho rozdelenia. Predovšetkým počet žiakov, ktorí ani v jednej úlohe nepoužili algebraickú symboliku je vyšší. Priemerný počet úloh, v ktorých žiak použil algebraickú symboliku je u žiakov so zadaním s vizuálnym modelom **1, 36** a u žiakov, ktorí vizuálny model v zadaniach nemali, je **1, 67**.

Zároveň:
Percentuálne vyjadrenie použitia algebraickej symboliky (aspoň raz) v druhej úlohe pri zadaní s vizuálnym modelom je **27,23 %**, bez vizuálneho modelu je **36,36 %**.
Percentuálne vyjadrenie použitia algebraickej symboliky (aspoň raz) v tretej úlohe pri zadaní s vizuálnym modelom je **44 %**, bez vizuálneho modelu je **61,70 %**.
Percentuálne vyjadrenie použitia algebraickej symboliky (aspoň raz) v štvrtej úlohe pri zadaní s vizuálnym modelom je **63,56 %**, bez vizuálneho modelu je **68,94 %**.

Uvedené čísla ukazujú, že pri uvedení vizuálneho modelu sa znížilo použitie algebraickej symboliky. Je to vcelku prirodzené, pretože vizuálny zápis je alternatívne vyjadrenie úlohy, a tak mnohí žiaci necítia potrebu dopĺňať ho o algebraickú symboliku. Pozoruhodné je tiež že sa tento efekt prejavil v každej z úloh.

H2.2 Vyhodnotenie prvej a piatej úlohy

V prvej úlohe algebraickú symboliku použilo **81,33 %** žiakov experimentálnej skupiny a **79,14 %** žiakov kontrolnej skupiny. V piatej úlohe sa algebraická symbolika vyskytla v zápise **67,56 %** žiakov experimentálnej skupiny a **62,13 %** žiakov kontrolnej skupiny.

Aj v prvej, aj v piatej úlohe bolo percentuálne vyjadrenie počtu žiakov, ktorí použili algebraickú symboliku v experimentálnej skupine vyššie ako v skupine kontrolnej.
Zmenu nepovažujeme za štatisticky významnú.

Preto ***nemôžeme prijať*** hypotézu H2: Vizuálny model zvýši výskyt použitia algebraickej symboliky.

Hypotéza H3:
Vizuálny model napomôže správnemu používaniu algebraickej symboliky pri zapísaní vzťahu.

H3.1 Vyhodnotenie druhej, tretej a štvrtej úlohy

Pri overovaní tretej hypotézy sa opäť najprv zameriame na druhú, tretiu a štvrtú úlohu, teda tie úlohy, v zadaní ktorých niektorí žiaci mali uvedený vizuálny model a niektorí žiaci vizuálny model uvedený nemali. Uvedomme si však, že neuvedenie rovnice, uvedenie správnej rovnice a uvedenie nesprávnej rovnice nie sú tri metrické hodnoty jedného štatistického znaku. Nebudeme teda počítať priemerné hodnoty ako pri predchádzajúcich hypotézach.

Žiaci, ktorí mali v zadaniach uvedený vizuálny model, zapísali rovnicu celkovo v (40 + 71 + 124 =) 235 úlohách, pričom v (35 + 63 + 106 =) 204 úlohách, teda **86,81 %**, bola rovnica uvedená správne.
Žiaci, ktorí mali v zadaniach nemali uvedený vizuálny model, zapísali rovnicu v (55 + 88 + 134 =) 277 úlohách, pričom v (43 + 71 + 111 =) 225 úlohách, teda **81,23%**, bola rovnica uvedená správne.

Zároveň:
Percentuálne vyjadrenie správnosti zapísania rovnice v druhej úlohe pri zadaní s vizuálnym modelom je **87,5 %**, bez vizuálneho modelu **78,18%**.
Percentuálne vyjadrenie správnosti zapísania rovnice v tretej úlohe pri zadaní s vizuálnym modelom je **88,73 %**, bez vizuálneho modelu **80,68 %**.
Percentuálne vyjadrenie správnosti zapísania rovnice v štvrtej úlohe pri zadaní s vizuálnym modelom je **85,48 %**, bez vizuálneho modelu **82,84 %**.

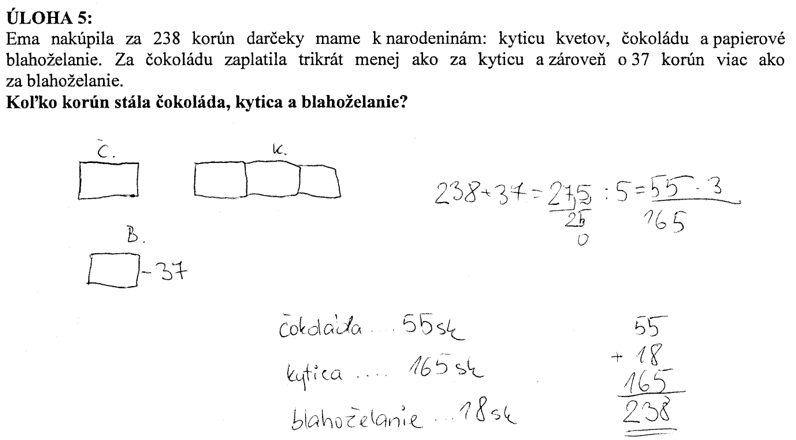
H3.2 Vyhodnotenie prvej a piatej úlohy

V prvej úlohe, v prípade zapísania rovnice zapísalo túto rovnicu správne **77,27 %** žiakov experimentálnej skupiny a **80,50 %** žiakov kontrolnej skupiny. V piatej úlohe, v prípade zapísania rovnice zapísalo túto rovnicu správne **60,50 %** žiakov experimentálnej skupiny a **59,13 %** žiakov kontrolnej skupiny.

Teda napriek tomu, že v prvej úlohe bola úspešnosť zapísania správnej rovnice v prípade uvedenie rovnice v experimentálnej skupine nižšia, v piatej úlohe bola úspešnosť mierne vyššia.

Pri zohľadnení výsledkov v bode H3.1 ***môžeme prijať*** hypotézu H3: Vizuálny model napomôže správnemu používaniu algebraickej symboliky pri zapísaní vzťahu.

Ukážka žiackeho riešenia



ÚLOHA 5:
Ema nakúpila za 238 korún darčeky mame k narodeninám: kyticu kvetov, čokoládu a papierové blahoželanie. Za čokoládu zaplatila trikrát menej ako za kyticu a zároveň o 37 korún viac ako za blahoželanie.
Koľko korún stála čokoláda, kytica a blahoželanie?

Obr. 4 Riešenie piatej úlohy žiakom z experimentálnej skupiny

Záver

Výskum v predloženej dizertačnej práci je zameraný na vplyv uvedeného vizuálneho modelu ako dodatočnej reprezentácie pri riešení slovných úloh. Tento vplyv sa ukázal pozitívny aj z hľadiska úspešnosti riešenia, aj z hľadiska výskytu algebraickej symboliky, aj z hľadiska správnosti zápisu rovnice (v prípade uvedenia rovnice). Na základe štatistického vyhodnotenia môžeme konštatovať, že v prípade úspešnosti riešenia a v prípade správnosti zapísanej rovnice experimentálna skupina (ktorá bola v prvej úlohe horšia ako kontrolná) vplyvom druhej, tretej a štvrtej úlohy s uvedeným vizuálnym modelom, dosiahla v piatej úlohe lepšie výsledky ako kontrolná skupina. Vplyv vizuálneho modelu na výskyt algebraickej symboliky je nutné hodnotiť z dvoch hľadísk. Porovnanie riešení druhej, tretej a štvrtej úlohy s uvedeným vizuálnym modelom a bez uvedeného vizuálneho modelu ukazuje, že pri riešení úlohy, ktorá obsahuje vizuálny model, je výskyt algebraickej symboliky nižší. Tento jav možno vysvetliť tým, že žiaci, ktorí vyriešili úlohu pomocou vizuálneho modelu, necítili potrebu prejsť k alternatívnemu, algebraickému zápisu. Porovnanie prvej a piatej úlohy v experimentálnej a kontrolnej skupine však ukazuje na pozitívny vplyv úloh s uvedeným vizuálnym modelom na výskyt algebraickej symboliky v experimentálnej skupine.

Hodnoty štatistických ukazovateľov splnili naše očakávania. Vizuálny model bol pre žiakov experimentálnej skupiny novým prvkom pri riešení slovných úloh, preto sme v porovnaní úloh s vizuálnym modelom a bez vizuálneho modelu nepredpokladali veľmi veľké rozdiely.

Vzhľadom na pozitívny vplyv uvedeného vizuálneho modelu na riešenie slovných úloh navrhujeme vykonať rozsiahlejší výskum zameraný na určenie toho, v akej vekovej skupine a v akom rozsahu je použitie vizuálneho modelu pri riešení slovných úloh optimálne. V prípade potvrdenia pozitívneho vplyvu by bolo vhodné tento typ úloh zaradiť do učiva.

Zoznam bibliografických odkazov

Battista, M.; Brown, C. (1998): *Using Spreadsheets to Promote Algebraic Thinking*. In: Teaching Children Mathematics 4, 470-478.

Berová, Z.;Bero, P. (2004): *Pomocník z matematiky pre 7. ročník ZŠ*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 2004

Cai, J.; Knuth, E. J.; (2005): *The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives*, In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 37 (1), 1-4.

Cai, J.; Lew, H. CH.; Morris, A.; Moyer, J. C.; Ng, S. F.; Schmittau, J.; (2005): *The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective,* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 37 (1), 5-15.

Descartes, R. (1637): *Rassuždenie o metode s priloženijami dioptrika, meteory, geometria*. Izdatelstvo Akademii Nauk CCCP, 1953.

Dewey, J. (1932): *Demokracie a výchova*, Laichter, Praha

Diofant Aleksandrijskij (250): *Arifmetika i Kniga o mnogougoľnych čislach*. Preklad I. Veselovskovo, redakcia a komentár I. Bašmakovoj. Nauka, Moskva 1974.

Driscoll, M. (1997): *Thinking About Algebraic Thinking: A Framework for Belief, Reflection, Discussion, and Student Work Analysis.* The Leadership for Urban Mathematics Reform Project (LUMR) for Linked Learning in Mathematics. Newton, MA.

Driscoll, M. (1999): *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann

Euklides: *Eukleides, Základy Knihy I –IV*, komentované Petrem Vopěnkou, OPS, Nymburk 2007

Fischer, R; Malle, G. (1992): *Človek a matematika*, SPN, Bratislava

Glasersfeld Von, E. (1995): *Radical constructivism*, London: The Falmer Press

Greenes, C.; Findell, C. (1998): *Algebra Puzzles and Problems (Grade 7*). Mountain View, CA: Creative Publications.

Hejný, M. (2004): *Mechanizmus poznávacího procesu*, In: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta Univerzita Karlova v Praze, Praha, 23-42

Hejný, M.; Benešová, M.; Bereková, H.; Bero, P.; Hrdina, Ľ.; Repáš, V.; Vantuch, J. (1990): *Teória vyučovania matematiky 2*, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1990

Hejný, M.; Kuřina, F. (2001): *Dítě, škola a matematika*, Portál, Praha

Hejný, M.; Novotná, J.; Stehlíková, N. (2004): *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, Pedagogická fakulta Univerzita Karlova v Praze, Praha

Hejný, M.; Stehlíková, N. (1999): *Číselné představy* detí, PedF UK, Praha

Herbert, K.; Brown, R. (1997): *Patterns as Tools for Algebraic Reasoning.* Teaching Children Mathematics 3, 340-344.

Kaput, J. J. (1993): Algebra for the 21st Century: Proceedings for the August 1992 Conference. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kho, T. H. (1987): *Mathematical models for solving arithmetic problems.* In Proceedings of Fourth Southeast Asian Conference on Mathematical Education (ICMI-SEAMS). Mathematical Education in the 1990's. June 1 – 3, 345 – 351. Singapore: Institute of Education.

Kieran, C. (2004): *Algebraic thinking in the early grades: What is it?* In: The Mathematics Educator (Singapore) 8(No. 1), 139-151

Kieran, C.; Chalouh, L. (1993): *Prealgebra: the Transition from Arithmetic to Algebra.* In: Research ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics edited by Douglas T. Owens. Reston, VA: NCTM

Klein, J. (1934): *Greek Mathematical Tthought and the Origin of Algebra*. MIT Press 1968.

Křišťan, J. (1970): *Slovní úlohy v 8. a 9. ročníku ZDŠ*, In: Matematika ve škole 9/XX, SPN, Praha

Muchammad Ibn Musa al-Chorezmi (800): *Matematíčeskije traktaty.* Taškent 1983.

Ng, S. F. (2001): *Secondary school students' perceptions of the relationship between the model method and algebra*. In: H.

Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra. (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, 468-476). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Ng, S. F.; Lee, K. (2005): *How Primary Five Pupils Use the Model Method to Solve Word Problems*, In: The Mathematics Educator 2005, Vol. 9 (1), 55-78.

Noss, R.; Healy, L.; Hoyles, C. (1997): *The construction of mathematical meaning: Connecting the visual with the symbolic*, In: Educational Studies in Mathematics, Vol 33, 203-233.

Novotná, J. (2004): *Zpracování informací při řešení slovných úloh*, In: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta Univerzita Karlova v Praze, Praha, 367-377

Piaget, J. (1985): *The equilibrium of cognitive structures*. Cambridge, MA: Harvard University Press

Pytlak, M. (2007): *Odkrywanie regularności a myślenie algebraiczne*, In: Zborník príspevkov z konferencie Matematika v škole dnes a zajtra, PF UK, Ružomberok

Radford, L. (2007): *Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts*, In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 40, 83-96

Repáš, V.; Černek, P.; Kasová, Ľ.; Černeková, A. (2000): *Matematika pre 7. ročník základných škôl, 2. diel*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava

Schmittau, J. (2005): *The Development of AlgebraicThinking A Vygotskian Perspective*, In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 37 (1), 16-22.

Stehlíková, N. (2004): *Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice*, In: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta Univerzita Karlova v Praze, Praha, 11-21

Struik, D. J. (1963): *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha

Sutherland, R.; Balacheff, N. (1999): *Didactical complexity of computational environment for learning of mathematics*. In: International Journal of Computers for Mathematics Learning, 4, 1–26.

Šedivý, O.; Čeretková, S.; Malperová, M.; Bálint Ľ. (2001): *Matematika pre 7. ročník základných škôl 2. časť*, SPN, Bratislava

Tabach, M.; Acravi, A.; Hershkowitz, R. (2008): *Transitions among different symbolic generalizations by algebra beginners in a computer intensive environment*, In: Educational Studies in Mathematics, Vol 69 (1), 53-71

Turek, I. (1998): *Učiteľ a pedagogický výskum*, Metodické centrum v Bratislave, Bratislava

Usiskin, Z. (1997): *Doing Algebra in Grades K-4.* In: Teaching children Mathematics 3, 346-356.

Vance, J. (1998): *Number Operations from an Algebraic Perspective*. Teaching Children Mathematics, 282-285.

Viète, F. (1591): *Introduction to the Analytical Art*. In: Klein 1934, s. 313-353.

Vygotskij, L. S. (1970): *Myšlení a reč*, SNP, Praha

Vygotskij, L. S. (1976): *Vývoj vyšších psychických funkcí*, SPN, Praha

Wimmer, G. (1993): *Štatistické metódy v pedagogike*, Gaudeamus, Hradec Králové

Internetové zdroje

The International Commission on Mathematical Instruction, http://www.mathunion.org/ICMI/, citované dňa 13.10.2007

The Future of the Teaching and Learning of Algebra, 12th ICMI Study
http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/icmi-algebra/, citované dňa 13.10.2007

Brekke, G.; McGregor, M. (2001): *Why Algebra?What Algebra?* Working Group Presentation ICMI Algebra Study Conference, University of Melbourne, http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/icmialgebra/FromParticipants/WGWhyWhat/whywhatwgpresentation.pdf, citované dňa 13.10.2007

Kriegler, S., *Just what is algebraic thinking?* Submitted for Algebraic Concepts in the Middle School, A special edition of Mathematics Teaching in the Middle School, http://www.math.ucla.edu/~kriegler/pub/algebrat.html, citované dňa 13.10.2007

Hejný, M., *Prednášky z didaktiky matematiky*

http://userweb.pedf.cuni.cz/kmdm/download/katedra/hejny/DM2_01.pdf, citované dňa 13.10.2007, http://oldweb.pedf.cuni.cz/kmdm/download/katedra/hejny/DM2_01.pdf , citované dňa 14.1.2009

Kvasz, L., *Kapitoly z dejín algebry*, http://www.matika.sk/archiv/kvasz/Dejalg/Obsah.htm , citované dňa 14.1.2009

Kvasz, L.: *Vznik algebraickej symboliky,* http://www.suma.jcmf.cz/UserFiles/58_14/Kvasz_prednaska.pdf , citované dňa 14.1.2009

Monka, Y., Histoire de l'algèbre et des équations, http://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr/Page.php?IDP=684&IDD=0, citované dňa 13.10.2007

Štátne vzdelávacie programy http://www.minedu.sk/index.php?lang=sk&rootId=2319 ,citované dňa 14.1.2009

Vzdelávací štandard z matematiky ZŠ – pred reformou http://www.statpedu.sk/buxus/docs//Pedagogicke_dokumenty/zakladne_skoly/standardy/VS_matem_2st_ZS.pdf, citované dňa 13.10.2007

Učebné osnovy z matematiky ZŠ – pred reformou
http://www.statpedu.sk/buxus/docs//Pedagogicke_dokumenty/zakladne_skoly/osnovy/UO_matematika_5-9_ZS.pdf,
citované dňa 13.10.2007

Vzdelávací štandard pre štvorročné gymnáziá – pred reformou
http://www.statpedu.sk/buxus/generate_page.php?page_id=698,
citované dňa 13.10.2007,
http://www.statpedu.sk/buxus/docs/Pedagogicke_dokumenty/Gymnazia/4roc/standardy/VS_G4_Matematika.pdf , citované dňa 14.1.2009

Štatistické výpočty
http://www.danielsoper.com/statcalc/ , citovaná dňa 14.1.2009

Zoznam vlastných publikácií

- Vyslocká E.(2005): *Tvorba úloh pre korešpondenčné semináre*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava
- Ďuriš J., Masaryk I., Pémová M., Slavíčková M., Vankúš P., Vyslocká E.(2006): *Matematika v teplákoch pri príprave budúcich učiteľov*, In Zborník príspevkov z konferencie didZA 3, Žilina, Žilinská univerzita
- Vyslocká E. (2006): *Aktivity overené na sústredeniach*, In Sborník príspevku z konference Dva dny s didaktikou matematiky, Praha, Univerzita Karlova v Praze
- Miťková, E. (2007): *Rok s korešpondenčným seminárom*, In: Zborník príspevkov z konferencie Matematika v škole dnes a zajtra, PF UK, Ružomberok
- Miťková, E. (2008): *Štyri úlohy vedúce k lineárnej rovnici*, In: II. Zborník príspevkov štipendistov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory, Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK Bratislava
- Masaryk, I., Ďuriš, J., Miťková, E.,Vankúš, P., Pémová, M., Michalík, M. (2008): *Učiteľské sústredenie Dobrá Voda – Jeseň 2007*, In: II. Zborník príspevkov štipendistov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory, Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK Bratislava

Summary

The presented PhD. thesis engages in research on the influence of visual model as additional representation of pupil’s success in solving word problems leading to linear equation. Visual model corresponds with pictorial equation used for word problems teaching in Singapure.

We focused on the solution correctness, symbolic notation employment and correctness of algebraic symbolism employment in notation of relation.

We engaged 460 pupils into our experiment, all had to solve five word problems. Since we wanted to find out the influence of visual model, pupils were divided in two groups. First group had to solve word problems, which had only verbal form (we’ll call them control group), the second one had in second, third and forth word problem additional visual representation (we’ll name them experimental group). We compared solutions of one group to another. Even more important for our research was to compare first and fifth word problem in both groups.

When we focus to compare second, third and forth word problem one group to another, we can say, the visual model has good influence on solution correctness and correctness of algebraic symbolism employment in notation of relation. Symbolic notations usage in experimental group is less notable then in the control group. We suppose, the reason is the usage of symbolic notations was not necessary in the experimental group.

When we focus to compare the first and the fifth problem, we can conclude, the visual model has good influence on all of the three aspects: the solution correctness, symbolic notation employment and correctness of algebraic symbolism employment in notation of relation.

Concerning the positive influence of introduced visual model in word problems solving, we suggest to make a next more extensive research oriented to find out the optimal class of age and extend of visual model usage in word problems for pupils best algebraic thinking development.