Komplexná analýza II. – Úloha č. 6

Termín odovzdania: 11. november 2026

---

1. *(10 bodov)* Ukážte, že platí

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Návod: a) Ukážte, že rad na pravej strane konverguje rovnomerne pre každú kompaktnú množinu neobsahujúcu $n \in \mathbb{Z}$.

b) Ukážte, že rozdiel pravej a ľavej strany musí byť 0; využite to, že obe sú periodické s periódou 1 a nájdite ich limity pre $|y| \to \infty$ (kde $z = x + iy$).

2. *(10 bodov)* Integrovaním rovnosti z príkladu č. 1 ukážte, že platí

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Nezabudnite zdôvodniť prečo integračná konštanta musí byť 0.

3. *(10 bodov)* Ukážte, že platí:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \lim_{m \to \infty} \sum_{-m}^{m} (-1)^n \frac{1}{(z-n)}.$$

Návod: Rozdeľte na kladné a záporné časti, použite príklad č. 2.

4. *(10 bodov)* Pomocou rozvoja $\cot \pi z$ nájdite hodnoty radov

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

5. *(10 bodov)* Nájdite podobný rozklad na čiastočné zlomky ako v príklade 3. pre $1/\cos \pi z$ a ukážte, že z toho vyplýva $\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$.