

## Diskrétna matematika I. – Vianočná sada úloh

Príprava na skúšku alebo príklady pre tých, ktorých ešte neopustilo nadšenie

---

1. Napíšte negácie nasledujúcich výrokov:

- (i)  $n$  je párne alebo  $m$  je násobkom 3,
- (ii) každé  $x \in A$  je prvkom  $A \cap B$ ,
- (iii) ak dnes neprší, potom nepadajú traktory.

2. Preložte význam nasledujúceho výroku do krátkej slovenskej vety (dá sa to na 5 slov) a tiež napíšte jeho negáciu v symbolickom jazyku. (V tomto príklade premenné  $m, n, a, b$  sú chápané ako kladné celé čísla, t.j.  $\forall m$  znamená  $\forall m \in \mathbb{N}^+$ .)

$$(\forall m)(\exists n)(\forall a)(\forall b)[[n \geq m] \wedge [(a = 1) \vee (b = 1) \vee ((ab \neq n) \wedge (ab + 2 \neq n))]].$$

3. Daná je operácia  $*$  na prirodzených číslach splňajúca:

- (i)  $1 * n = n - 1$  pre všetky  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (ii)  $m * 1 = (m - 1) * 2$  pre všetky  $m \in \mathbb{N}, m > 1$ ,
- (iii)  $m * n = (m - 1) * (m * (n - 1))$  pre  $m, n \in \mathbb{N}, m, n > 1$ .

Nájdite hodnotu  $5 * 5$ .

4. Symetrický rozdiel  $A \Delta B$  množín  $A$  a  $B$  je definovaný ako  $(A - B) \cup (B - A)$ . Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt pre výroky  $x \in A, x \in B, x \in C$  ukážte, že operácia  $\Delta$  je asociatívna. Ďalej ukážte, že  $x$  patrí do  $A \Delta (B \Delta C)$  práve vtedy, ak  $x$  patrí do nepárneho počtu z množín  $A, B, C$ . Použite toto pozorovanie na zostrojenie ďalšieho dôkazu, že  $\Delta$  je asociatívna operácia.

5. Definujme binárnu operáciu  $*$  na  $\mathbb{Z}^2$  nasledujúcou formulou:  $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$ . Dokážte, že operácia  $*$  je komutatívna a asociatívna. Nájdite predpis pre

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) * \dots * (a_k, b_k).$$

6. Nech  $f$  je zobrazenie z reálnych čísel do reálnych čísel. Hovoríme, že  $f$  je *striktne rastúca funkcia* ak pre  $x < y$  je aj  $f(x) < f(y)$ . Ukážte, že ak je  $f$  striktne rastúca, potom je injektívna. Musí nutne byť aj surjektívna? Predpokladajme, že  $f$  je bijektívna,  $f(0) = 0$  a  $f(1) = 1$ . Vyplýva z toho, že  $f$  je striktne rastúca? Ak je  $f$  spojitá?

7. Nech  $O$  je obdĺžnik, ktorý sa dá rozdeliť na menšie obdĺžniky, z ktorých každý ma aspoň jednu stranu celočíselnej dĺžky. Ukážte, že aj  $O$  má aspoň jednu stranu celočíselnej dĺžky.

8. Nech  $n$  je párne číslo a  $\mathcal{A}$  systém podmnožín množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  s vlastnosťou, že pre každé  $A, B \in \mathcal{A}$  je počet prvkov  $A \cap B$  párny (toto platí aj pre dvojicu  $A = B$ ). Koľko množín môže  $\mathcal{A}$  obsahovať? Ako sa zmení odpoveď ak množiny v  $\mathcal{A}$  majú párny počet prvkov, ale pre  $A \neq B$  je veľkosť prieniku  $A \cap B$  nepárna?

9. Dá sa uzavretý interval  $\langle 0, 1 \rangle$  zapísať ako nekonečné spočítateľné zjednotenie disjunktných neprázdnych uzavretých intervalov?

10. Daných je  $n$  bodov v rovine, pričom neležia všetky na jednej priamke. Ukážte, že je možné nájsť priamku, na ktorej ležia práve dva z nich.

11. Nech  $\langle a_i, b_i \rangle$  je uzavretý interval kladných reálnych čísel pre  $i \in \mathbb{N}$ . Predpokladajme, že  $\sum_i (b_i - a_i) < \infty$ . Vyplýva z toho, že existuje nejaké reálne číslo  $x$  také, že  $nx$  nepatrí do žiadneho intervalu  $\langle a_i, b_i \rangle$  pre každé prirodzené  $n$ ?

12. Majme nekonečný spočítateľný kruh docentov, z ktorých každý má na hlave klobúk. Klobúky sú modré alebo červené a každý docent vidí klobúky všetkých kolegov okrem toho svojho. V istom momente

musia docenti naraz zakričať farbu svojho klobúka. Dajú sa docentom dať také inštrukcie, aby sa, bez ohľadu na distribúciu farieb klobúkov, pomýlilo iba konečne veľa docentov?

**13.** Majme nekonečný spočítateľný kruh ostrozrakých docentov, z ktorých každý má na hlave klobúk. Klobúk  $i$ -teho docenta má farbu, ktorá sa dá zakódovať pomocou trojice reálnych čísel  $(r_i, g_i, b_i)$ , teda farbu klobúka vyberáme zo *spojitého spektra*. Každý docent vidí klobúky všetkých kolegov okrem toho svojho a vďaka ostrozrakosti vie presne určiť ich farby – trojice  $(r_j, g_j, b_j)$ . V istom momente musia docenti naraz zakričať farbu svojho klobúka – trojicu reálnych čísel. Dajú sa docentom dať také inštrukcie, aby sa, bez ohľadu na distribúciu farieb klobúkov, pomýlilo iba konečne veľa docentov?

*Pre porovnanie:* Aká je pravdepodobnosť, že jeden osamotený docent určí správne farbu svojho klobúka (vybranú zo spojitého spektra), ak svoj klobúk nevidí?

**14.\*** Pre kardinalitu množín by sme mohli definovať iné porovnanie ich veľkostí: povieme  $|A| \geq |B|$  ak existuje surjektívne zobrazenie  $f : A \rightarrow B$ . Otázka potom je, či táto relácia naozaj bude usporiadanie – reflexívnosť a tranzitívnosť sú pomerne priamočiare, pre antisymetriu potrebujeme obdobu Cantor-Bernsteinovej vety pre surjekcie. Platí vôbec?<sup>1</sup> Dala by sa ukázať aspoň Cantorova veta  $|\mathcal{P}(M)| > |M|$ ?

---

<sup>1</sup> Pozri:

<http://math.stackexchange.com/questions/176972/is-there-a-cantor-schroder-bernstein-statement-about-surjective-maps>

<http://math.stackexchange.com/questions/46168/cantor-bernstein-like-theorem-if-f-colon-a-to-b-is-injection-and-g-colon-a-t>