

Axiómy a vety výrokovej logiky, ktoré môžete použiť:

- | | |
|---|---|
| (A1) $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ | (V1) $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ |
| (A2) $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ | (V2) $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$ |
| (A3) $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ | (V2') $\vdash B \Rightarrow \neg\neg B$ |
| (V0) $\vdash A \Rightarrow A$ | (V3) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ |

1. Postupnosť $\{b_n\}$ je definovaná predpisom

$$b_{n+2} = \frac{1}{(n+2) \left(\frac{1}{(n+1)b_{n+1}} + \frac{1}{nb_n} - n \right)}$$

pre $n \geq 1$ a $b_1 = 1/2$ a $b_2 = 1/6$. Ukážte, že $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

2. Ukážte, že pre členy Fibonacciho postupnosti $\{F_n\}$ (t.j. $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) platí:

$$F_1 F_3 + F_2 F_4 + \dots + F_{2k-1} F_{2k+1} + F_{2k} F_{2k+2} = F_{2k} F_{2k+3}.$$

3. Zistite či je formula $B \Leftrightarrow C$ tautologickým dôsledkom množiny formúl $\{A \Rightarrow B, A \wedge C\}$.

4. Ukážte, že $\neg(B \Rightarrow \neg A) \vdash B \Rightarrow A$. Môžete použiť vyššie uvedené vety a axiómy, modus ponens a vetu o dedukcii.

5. Rozhodnite, či je nasledujúca kvantifikovaná formula tautológiou alebo nájdite protipríklad:

$$((\exists x)\Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\Psi(x)) \Rightarrow (\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)).$$