Lineárna algebra
1-DAV-104/20
Leto 2024
12./13. cvičenia

1. Vypočítajte maticu ortogonálnej projekcie na daný podpriestor S.
   a) $S = \langle (1,0,0),(0,0,1)\rangle$;
   b) $S = \langle (3,2,1)\rangle$;
   c) $S = \langle (1,0,-1),(1,0,1)\rangle$;
   d) $S = \langle (1,0,-1),(1,1,0)\rangle$;
   e) $S = \langle (1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)\rangle$.

2. Dokážte, že každá matica P spĺňajúca podmienky $P^2 = P$ a $P^T = P$ je matica ortogonálnej projekcie na nejaký podpriestor. (Návod: Najprv si definujte podpriestor S. Matica ortogonálnej projekcie na S je určená dvoma podmienkami: $xP = x$ pre $x \in S$ a $yP = 0$ pre $y \in S^\perp$.)

3. Dokážte, že matica otočenia o uhol α, t.j.
$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$
   je špeciálna ortogonálna matica.

4. Dokážte, že matica M je ortogonálna, ak platí $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$.
$$M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

5. Zdôvodnite, prečo každá vlastná hodnota ortogonálnej matice spĺňa podmienku $|\lambda| = 1$. (Nápoveda: Násobenie ortogonálnou maticou zachováva určité vlastnosti vektorov.)