

Lineárna algebra

1-DAV-104/20

Leto 2024

13. cvičenia

1. Postupnosťou simultánných riadkových a stĺpcových operácií preveďte matice na diagonálny tvar a určite signatúru príslušnej kvadratickej formy:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a) Ukážte, že matice A a B sú kongruentné, t.j. $A = QBQ^T$ a nájdite maticu kongruencie Q :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Na základe časti a) navrhňte ako diagonalizovať maticu kvadratickej formy v prípade, ak má všetky "pivotové", t.j. diagonálne, pozície nulové.
- c) Nájdite kanonický tvar pre kvadratickú formu danú maticou A .
3. Predpokladajme, že matica A sa dá elementárnymi riadkovými operáciami typu III. (pripočítanie násobku rovnice J . k rovnici I ., kde $J < I$) previesť na hornú trojuholníkovú maticu U' .
- a) Ukážte, že potom má tzv. LU -, resp. LDU -rozklad $A = LU' = LDU$, kde L je dolná trojuholníková matica s jednotkami na diagonále.
- b) Zdôvodnite prečo by sme pre symetrickú maticu A , splňajúcu $A = A^T$, mali dostať tzv. LDL^T -rozklad $A = LDL^T$.
- c) Nájdite LDL^T -rozklady matíc z príkladu č. 1.
4. Uvažujte kvadratickú formu v \mathbb{R}^3 : $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2ax_2x_3$.
- a) Nájdite symetrickú 3×3 maticu zodpovedajúcu tejto kvadratickej forme.
- b) Rozhodnite, či je táto forma kladne definitná pre nejakú hodnotu a .
5. a) Vhodnou *ortogonálnou* zmenou súradníc preveďte kvadratickú formu

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

na diagonálny tvar.

- b) Pre krivku $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 1$ určite jej typ a načrtnite ju v \mathbb{R}^2 .