Lineárna algebra a geometria I. – Úloha č. 0

Cvičenia v týždni 21. septembra 2026

---

1. (1.3.2) Pre systém

$$\begin{aligned} u+\ v+\ w &= 2\\ u+3v+3w &= 0\\ u+3v+5w &= 2 \end{aligned}$$

postupnou eliminációu nájdite príslušný trojuholníkový systém a jeho riešenie.

2. (1.3.4) Použite eliminačnú metódu pre systém

$$\begin{aligned} u+\ v+w &= -2\\ 3u+3v-w &= 6\\ u-\ v+w &= -1. \end{aligned}$$

Ak sa počas eliminácie vyskytne nula na pozícii pivota, vymeňte príslušnú rovnicu s nasledujúcou a pokračujte v eliminácii ďalej. Aká hodnota koeficientu pri neznámej v v poslednej rovnici, namiesto súčasnej -1, by znemožnila pokračovať v eliminácii, a teda spôsobila zlyhanie eliminačného algoritmu?

3. (1.2.2) Riešte nesingulárny systém rovníc v trojuholníkovom tvare

$$\begin{aligned} u+v+w &= b_1\\ v+w &= b_2\\ w &= b_3. \end{aligned}$$

Ukážte, že nájdené riešenie udáva kombináciu stĺpcov, ktorá sa rovná stĺpcu na pravej strane.

4. (1.2.8) Zdôvodnite prečo je systém

$$\begin{aligned} u+\ v+\ w &= 2\\ u+2v+3w &= 1\\ v+2w &= 0 \end{aligned}$$

singulárny, nájdite lineárnu kombináciu týchto troch rovníc, ktorá sa vyščíta do rovnosti $0 = 1$. Akou hodnotou musíme nahradiť nulu v poslednom riadku na pravej strane, aby sústava mala riešenie? Ako vyzerá také riešenie?

5. (1.2.11) Sústava rovníc

$$\begin{aligned} ax+2y &= 0\\ 2x+ay &= 0 \end{aligned}$$

má vždy riešenie $x = y = 0$. Pre akú hodnotu parametra a máme celú priamku riešení?

Ďalšie príklady

6. Uvažujme dva vektory $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ a $v = [v_1, v_2, v_3]^T$. Ukážte, že $u \perp v$ práve vtedy, keď $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$.[1]

7. a) Uvažujme rovinu danú rovnicou $\rho : ax+by+cz = d$ (všeobecná rovnica roviny, normálový tvar)[2]. Ukážte, že vektor $n = [a, b, c]^T$ je kolmý na rovinu ρ.[3]
b) (1.2.12) Načrtnite rovinu danú rovnicou $x + y + z = 1$, resp. jej časť v kladnom oktante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Načrtnite rovinu danú rovnicou $x + y + z = 2$ v tom istom obrázku. Ktorý vektor je *kolmý* na tieto roviny?

---

[1] Výraz $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ sa nazýva skalárny súčin vektorov u a v.

[2] $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, navyše, pretože ide o rovinu, aspoň jedno z čísel a, b, c je nenulové

[3] Vektor je kolmý na rovinu ρ práve vtedy, keď je kolmý na ľubovoľnú priamku z roviny ρ.

8. (1.2.5) Nájdite dva body na priamke, ktorá je prienikom nadrovín daných rovnicami $t = 0$, $z = 0$ a $x + y + z + t = 1$ v štvorrozmernom priestore.