Lineárna algebra a geometria I. – Domáca úloha č. 1

Cvičenia v týždni 28. septembra 2026

---

1. (1.2.1) Pre rovnice $x+y=4$, $2x-2y=4$ nakreslite riadkový obrázok (dve pretínajúce sa priamky) a stĺpcový obrázok (kombináciu dvoch stĺpcových vektorov rovnajúcu sa stĺpcovému vektoru $[4,4]^T$ na pravej strane).

2. (1.3.11) Použite elimináciu na nájdenie riešení systémov

$$\begin{aligned} u+\ v+\ w &= 6 \\ u+2v+2w &= 11 \\ 2u+3v-4w &= 3 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} u+\ v+\ w &= 7 \\ u+2v+2w &= 10 \\ 2u+3v-4w &= 3. \end{aligned}$$

3. (1.3.3) Riešte systém

$$\begin{aligned} 2u-\ v &= 0 \\ -u+2v-\ w &= 0 \\ -v+2w-\ z &= 0 \\ -\ w+2z &= 5. \end{aligned}$$

Gaussovou eliminačnou metódou. Riešenie zapíšte ako vektor $[u,v,w,z]^T$.

4. Predpokladajme, že

(a) 80 percent z tých, čo bývajú v Kalifornii na začiatku roka 0 tam býva aj na začiatku roka 1, zvyšných 20 percent sa počas roka 0 odsťahuje preč.

(b) 90 percent z tých, čo začnú rok 0 mimo Kalifornie aj mimo Kalifornie zostane, zvyšných 10 percent sa počas roka 0 do Kalifornie prisťahuje.

a) Označme u_0 (u_1) počet ľudí mimo Kalifornie na začiatku roka 0 (roka 1) a v_0 (v_1) počet ľudí v Kalifornii na začiatku roka 0 (roka 1). Skonštruujte rovnice vyjadrujúce u_1 a v_1 v závislosti od u_0 a v_0.

b) (1.3.12) Ak $u_1 = 200$ miliónov a $v_1 = 30$ miliónov na začiatku roka 1, nájdite príslušné počty u_0 a v_0 na začiatku roku 0.

c) (1.3.13) Ak platí $u_0 = u_1$ a $v_0 = v_1$ (počet ľudí v Kalifornii / mimo Kalifornie je rovnaký na začiatku oboch rokov), nájdite pomer $u_1 : v_1$.

5. (1.4.3) Nájdite skalárne súčiny

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 4 & a & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Prvý z nich udáva dĺžku vektora (na druhú). Ako treba zvoliť parameter a, aby boli vektory $(4,a,-3)^T$ a $(a,2,8)^T$ kolmé?

6. (1.4.1) Vypočítajte súčiny

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ a } \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Overte, že násobenie matice a vektora zodpovedá lineárnej kombinácii stĺpcov matice s koeficientami, ktoré sa nachádzajú vo vektore. Spočítajte

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7. (1.4.10) Ak označíme zložky matice A ako a_{ij}, kde $a_{11} \neq 0$. Vyjadrite v tejto symbolike

(i) prvý pivot,

(ii) násobok l_i prvého riadku, ktorý musíme v eliminácii odčítať od i-teho riadku,

(iii) novú hodnotu, ktorá nahradí hodnotu a_{ij} po tomto odčítaní,
(iv) hodnotu výrazu na pozícii $(2, 2)$ v redukovanej matici; za akých podmienok ide o druhý pivot?

8. (1.4.19) Ktorá z nasledujúcich matíc sa musí rovnať $(A + B)^2$?

$(B + A)^2, A^2 + 2AB + B^2, A(A + B) + B(A + B), (A + B)(B + A), A^2 + AB + BA + B^2.$