Lineárna algebra – Domáca úloha č. 3

Cvičenia v týždni 12. októbra 2026

---

1. (1.6.4) (a) Ak je A invertibilná matica a $AB = AC$, dôkážte, že $B = C$.
(b) Pre $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ nájdite matice B a C, pre ktoré $AB = AC$ ale $B \neq C$.

2. Odvoďte vzťah na výpočet inverznej 2×2 matice k regulárnej matici $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ a nájdite inverzné matice k týmto maticiam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \sinh(x) & 1 \\ -1 & \sinh(x) \end{bmatrix}.$$

3. (1.6.6) Nájdite inverzné matice k maticiam

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Uvažujme 4×4 maticu A s reálnym parametrom q. Pre ktoré hodnoty parametra q je matica A regulárna? V regulárnom prípade nájdite inverznú maticu A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & q-2 & q & -q \\ 1 & -q+2 & 1 & 2q+1 \\ -1 & q-2 & -1 & -2q \end{bmatrix}.$$

5. (1.6.12) Ktoré z vlastností matice sa zachovávajú aj pre maticu k nej inverznú? Svoje tvrdenie zdôvodnite.
a) A je (horná/dolná) trojuholníková,
b) A je symetrická,
c) A je tridiagonálna (t.j. nenulové prvky môžu byť iba na hlavnej diagonále a na dvoch diagonálach s ňou susediacich),
d) všetky zložky A sú celé čísla,
e) všetky zložky A sú racionálne čísla.

6. (1.6.14) Ukážte, že (aj) pre obdĺžnikové matice sú matice AA^T a A^TA vždy symetrické. Ukážte na príklade, že sa tieto matice nemusia rovnať, a to ani pre štvorcové matice.

7. (1.6.16) (a) Koľko je navzájom nezávislých zložiek v symetrickej matici typu $n \times n$?
(b) Koľko je navzájom nezávislých zložiek v antisymetrickej matici typu $n \times n$?

8. (1.6.17) (a) Ak v rozklade $A = LDU$ máme na diagonálach trojuholníkových matíc L a U jednotky, ako bude vyzerať rozklad matice A^T? Všimnite si, že matice A a A^T (v prípade, že počas eliminácie nedochádza k výmene riadkov) majú rovnaké vedúce prvky.
(b) Ako vyzerá vyzerá systém v hornom trojuholníkovom tvare pre $A^Ty = b$?

9. (1.R.10) a) Nájdite inverzné matice, ak existujú, pre:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b*) Nájdite inverzné matice k maticiam

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \text{a} \quad B_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -2 & 1 \\ & & & \iddots & & \\ 1 & 1 & -2 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

10*. Matica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je singulárna matica práve vtedy, keď existuje vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \neq \vec{0}$, že platí $A\bar{x} = \vec{0}$.

11. (1.6.23) Nech $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ a $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ sú obdĺžnikové matice. Ukážte, že $I - AB$ je invertibilná práve vtedy, keď $I - BA$ je invertibilná.

Návod. Použite $B(I - AB) = (I - BA)B$ a príklad 10.

Ďalšie príklady

12. (1.5.9) a) Za akých podmienok je matica A regulárna, ak A vznikne ako súčin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

b) Namiesto klasického riešenia systému $Ax = b$ pomocou substitúcie do $Ux = c$, riešte pomocou nového vektora neznámych c v rovnici $Lc = b$ pre

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b.$$

13. (1.5.11) Nájdite riešenie $LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ bez toho, aby ste roznásobovali LU.

14. (1.5.10) a) Prečo potrebujeme zhruba $n^2/2$ operácií násobenia-odčítania na vyriešenie redukovaného systému $Ux = c$, resp. $Lc = b$?

b) Koľko takýchto operácií treba pri eliminácii $n \times n$ matice?

15. (1.6.9) Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

eliminácia zlyhá. Ukážte, že k takejto matici neexistuje inverzná. Tretí riadok inverznej matice A^{-1} násobený maticou A by mal dať tretí riadok súčinu $A^{-1}A = I$. Prečo je to nemožné?

16. (1.7.5) Nájdite inverznú maticu pre 3×3 Hilbertovu maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

pomocou Gaussovej emiminácie.

17. (1.R.6,7) a) Existuje 16 rôznych 2×2 matíc so zložkami 0 alebo 1. Koľko z nich je invertibilných?

b) Podobne, máme šesťnásť rôznych 2×2 matíc so zložkami 1 alebo -1. Koľko z nich je invertibilných?

c*) (o dosť ťažšie) Ak náhodne vpíšeme nuly a jednotky do 10×10 matice, je pravdepodobnejšie, že bude regulárna alebo singulárna?