Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 2

Cvičenia v týždni 3. marca 2025

---

1. Nájdite príklad 3×3 horných trojuholníkových matíc, pre ktoré platí
(a) $AN(0) = 3$, $GN(0) = 3$,
(b) $AN(0) = 3$, $GN(0) = 2$,
(c) $AN(0) = 3$, $GN(0) = 1$.

2. Nájdite tabuľku algebraických a geomerických násobností pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

3. (5.2.12) *(Pravda/Nepravda)* Predpokladajme, že jedinými vlastnými vektormi matice A sú násobky vektora $x = (1, 0, 0)$.
a) A nie je invertibilná,
b) A má viacnásobnú vlastnú hodnotu,
c) A nie je diagonalizovateľná.

4. (5.2.13) Pre nasledujúce matice vyjde, že vlastné hodnoty matice A sú 1 a 9 a vlastné hodnoty matice B sú -1 a 9:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Nájdite maticovú druhú odmocninu matice A v tvare $R = S\sqrt{\Lambda}S^{-1}$. Prečo nemôže existovať druhá odmocnina pre maticu B s reálnymi zložkami?

5. a) Kedy vlastné vektory pre vlastnú hodnotu $\lambda = 0$ generujú celý nulový priestor $\mathcal{N}(A)$?
b*) Kedy generujú (všetky) vlastné vektory pre $\lambda \neq 0$ stĺpcový priestor $\mathcal{S}(A)$?
c*) Kedy je hodnosť matice A rovná počtu nenulových vlastných hodnôt?

6. (5.3.3) Nech je každý člen postupnosti $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$ priemerom predchádzajucich dvoch, t.j. $G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k)$. Nájdite príslušnú maticu (pomocou metódy popísanej v knižke) a zdiagonalizujte ju. Ak $G_0 = 0$ a $G_1 = \frac{1}{2}$ nájdite explicitný tvar pre člen G_k, tiež spočítajte limitu pre $k \to \infty$.

7. Nájdite explicitný tvar pre n-tý člen rekurentnej postupnosti $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ danej vzťahom $x_{n+1} = 6x_n - 9x_{n-1}$ s počiatočnou podmienkou $x_0 = -1$, $x_1 = 3$.
Návod. Maticu $A = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ napíšte v tvare $A = 3I + N$ a spočítajte $A^n = (3I + N)^n$. Môžeme použiť štandardnú binomickú vetu?

8. Nech postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ spĺňa rekurentný vzťah $x_{n-1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{2}$. Nájdite explicitný predpis pre x_n za predpokladu, že x_0 a x_1 sú známe. Akú podmienku musia spĺňať x_0 a x_1, aby postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bola ohraničená?

9. (5.R.11) Nech P je idempotentná matica, t.j. $P^2 = P$.
(a) Aké môžu byť vlastné hodnoty matice P?
(b) Ukážte, že $\mathcal{S}(P) = \mathcal{N}(I - P)$.
(c) Ukážte, že všetky idempotentné matice sú diagonalizovazeľné (*Návod.* Ukážte, že $AN(0) = GN(0)$ a $AN(1) = GN(1)$.)

10. (5.R.16) Presvedčte sa, že maticová rovnica

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

nemá riešenie, teda matica A nemá odmocninu. Zmeňte diagonálne zložky matice A na 4 a nájdite odmocninu pre takúto maticu.

11. Predpokladajme, že matice A a B sa dajú diagonalizovať tou istou diagonalizačnou maticou S, teda máme $A = S\Lambda_1 S^{-1}$ a $B = S\Lambda_2 S^{-1}$. Ukážte, že potom matice A a B komutujú a tiež, že vlastné hodnoty súčinu AB sú súčinom vlastných hodnôt matíc A a B. Ako je to s vlastnými vektormi?

12. Predpokladajme, že každá z matíc A a B má n rôznych vlastných hodnôt. Navyše predpokladajme, že matice A a B komutujú. Ukážte potom, že ak x je vlastný vektor matice A, potom je aj vlastným vektorom matice B. Výjdite z rovnosti $ABx = BAx$.

Pozn. Keďže toto platí pre každý vlastný vektor matice A, matice A a B majú rovnaké všetky vlastné vektory, a preto majú tú istú diagonalizačnú maticu S. Dá sa navyše dokázať, že (diagonalizovateľné) matice komutujú práve vtedy, keď majú rovnaké vlastné vektory.