Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 3

Cvičenia v týždni 10. marca 2025

---

1. (5.3.5) Predpokladajme, že počas epidémie každý mesiac polovica zdravých ľudí ochorie a štvrtina chorých ľudí zomrie. Nájdite stabilný stav príslušného Markovovského procesu

$$\begin{bmatrix} m_{k+1} \\ ch_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_k \\ ch_k \\ z_k \end{bmatrix}.$$

2. (5.3.7) Nájdite limitné hodnoty y_k a z_k pre $k \to \infty$ ak

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 0.8y_k + 0.3z_k \qquad & y_0 &= 0 \\ z_{k+1} &= 0.2y_k + 0.7z_k \qquad & z_0 &= 5. \end{aligned}$$

Tiež nájdite formuly pre y_k a z_k použijúc $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$.

3. (5.3.9) Predpokladajme, že spoločnosť *Sťahuj sa požičaným tirákom sám!* má tri hlavné centrá. Každý týždeň polovica z tých áut, čo sú v Malackách a Sabinove ide do Fiľakova a druhá polovica zostane tam, kde boli. Polovica tirákov z Fiľakova pôjde do Malaciek a druhá do Sabinova. Zostrojte 3×3 maticu prechodu A a nájdite stály stav u_∞ zodpovedajúci vlastnej hodnote $\lambda = 1$.

4. (5.3.12) Ak A je Markovovská matica, ukážte, že súčet zložiek vektora Ax sa rovná súčtu zložiek vektora x. Odvoďte z toho, že ak $Ax = \lambda x$ pre $\lambda \neq 1$, potom súčet zložiek vlastného vektora x je 0 (a teda nemôže byť nezáporný).

5. Ak A je Markovovská matica, ukážte, že vektor $(1, 1, \ldots, 1)^T$ je vlastný vektor matice A^T pre $\lambda = 1$. Keďže vieme, že matice A a A^T majú rovnaké vlastné hodnoty, toto je alternatívny dôkaz toho, že jednotka je vždy vlastnou hodnotou Markovovskej matice.

6. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory k permutačným maticiam

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zodpovedajú tieto permutácie nejakej rotácii okolo osi $(1, 1, 1)^T$ (resp. $(1, 1, 1, 1)^T$)?

7. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre rotačnú maticu

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

8. Nech $z = 2 - 3i$.
(a) Nájdite modulus (dĺžku) čísla z.
(b) Nájdite goniometrický tvar z, t.j. $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$.
(c) Nájdite exponenciálny tvar z, t.j. $z = re^{i\varphi}$.
(d) Nájdite siedmu mocninu čísla z.
(e) Nájdite siedme odmocniny čísla z.
(f) Nájdite komplexne združené číslo k číslu z.

9. Existuje reálna 2×2 matica, rôzna od I, ktorá spĺňa $A^3 = I$? Jej vlastné hodnoty musia spĺňať $\lambda^3 = 1$, čo spĺňajú okrem jednotky práve čísla $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Akú stopu a determinant by teda mala matica A mať? Nájdite A.