

1. (5.6.3) Vysvetlite, prečo matica A nemôže byť nikdy podobná matici $A + I$. (Návod. Pozrite sa na stopu oboch matic.)

2. (5.6.4) Nájdite diagonálnu maticu M , ktorej zložky sú 1 a -1 , tak aby matica M bola maticou podobnosti pre A a B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. (5.6.5) Ukážte, že ak je matica B invertibilná, potom sú matice AB a BA podobné.

4. (5.6.6) a) Ak $CD = -DC$ a D je invertibilná, ukážte, že potom je C podobná $-C$.

b) Odvoďte z toho, že vlastné hodnoty matice C musia existovať v pároch s opačnými znamienkami.

c) Ukážte priamym výpočtom, že ak $Cx = \lambda x$, potom $C(Dx) = -\lambda(Dx)$.

5. (5.6.8 a 9) Aká matica zodpovedá zmene báz z $v_1 = (1, 1)$ a $v_2 = (1, 4)$ na $w_1 = (2, 5)$ a $w_2 = (1, 4)$? Stĺpce matice M dostaneme tak, že vyjadríme v_1 a v_2 ako kombináciu w_1 a w_2 .

Vyjadrite vektor $(3, 9)^T$ ako kombináciu $c_1v_1 + c_2v_2$, aj ako kombináciu $d_1w_1 + d_2w_2$. Overte, že matica M naozaj prevádza c na d : $Mc = d$.

6. (5.6.27) Majme maticu A , pre ktorú $a_{ij} = 1$ pre zložky nad hlavnou diagonálou ($i < j$) a $a_{ij} = 0$ pre všetky ostatné ($i \geq j$). Nájdite jej vlastné vektory (napr. pre prípad 4×4), ako aj vektory spĺňajúce rovnice typu $Ax_{i+1} = x_i$, kde x_1 je vlastný vektor.

7. (5.R.3,4) Ak má matica A vlastné hodnoty 0 a 1, zodpovedajúce vlastným vektorom $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, prečo sa dá vopred, bez jej výpočtu, povedať že bude symetrická? Ako bude A vyzerat?

Aké budú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A^2 ? Aký je vzťah medzi A a A^2 ?

8. (5.R.25) a) Nájdite nenulovú maticu N , takú aby $N^3 = 0$.

b) Ukážte, že ak $Nx = \lambda x$, potom λ musí byť nula.

c) Dokážte, že (nenulová) N (ktorá sa nazýva *nilpotentná*) nemôže byť symetrická.

9. a) Nech A je nilpotentná matica (t.j. $A^k = 0$ pre nejaké k). Ukážte, že $\det(A + I) = 1$.

b) Matica B sa nazýva *unipotentná* ak je matica $B - I$ nilpotentná. Nájdite charakteristický polynóm unipotentnej matice V . Čo budú jej vlastné hodnoty?

10. Nech A je reálna symetrická matica, t.j. $A^T = A$. Ukážte, že ak $x \in \mathbb{C}^n$ je jej *komplexný* vlastný vektor, potom aj \bar{x} je vlastný vektor matice A . Overte, že $x + \bar{x}$ bude patriť do \mathbb{R}^n . Za akých podmienok pôjde o *reálny* vlastný vektor matice A ?

11. Majme matice $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ a $B \in M_{n,m}(\mathbb{C})$. Vychádzajúc z rovnosti

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

ukážte, že AB a BA majú rovnaké (nenulové) vlastné hodnoty. Nájdite vzťah medzi χ_{AB} a χ_{BA} .

Pozn.: porovnajte s príkladom 3. Vedeli by ste nájsť také A a B aby matice AB a BA neboli podobné?