Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 12

Pre týždeň 12. mája 2025

---

1. (6.2.13) Nájdite analogických päť podmienok aby 3×3 matica A bola *záporne definitná* (matica $-A$ je potom kladne definitná). Špeciálnu pozornosť venujte podmienke III) a súvisu $\det A$ a $\det(-A)$.

2. (6.3.1) Pre semidefinitné matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{(hodnosť 2)} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{(hodnosť 1)}$$

vyjadrite x^TAx ako súčet dvoch štvorcov a x^TBx ako jeden štvorec.

3. (6.3.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, kladne semidefinitné alebo indefinitné

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. (6.2.10) Elipsa $u^2 + 4v^2 = 1$ zodpovedá matici $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A a načrtnite elipsu. Spravte to isté pre elipsu $5u^2 + 8uv + 5v^2 = 1$ (pozri príklad č. 10).

5. (6.2.12) V trojrozmernom priestore rovnica $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$ reprezenutje elipsoid pokiaľ sú všetky λ_i kladné. Opíšte všetky možné plochy, ktoré dostaneme v semi-definitnom prípade, t.j. ak jedna alebo viac vlastných hodnôt bude nulových.

6. (6.2.9) Ak sa matica A dá napísať ako R^TR, dokážte, že platí zovšeobecnená Cauchy–Schwarzova nerovnosť $|x^TAy|^2 \leq (x^TAx)(y^TAy)$.

7. (6.2.17) Ak je matica A kladne definitná a zväčšíme v nej zložku a_{11}, ukážte pomocou Laplaceovho rozvoja, že aj jej determinant sa zvýši. Nájdite príklad indefinitnej matice, kde toto nebude pravda.

8. (*Rayleighov podiel)* Nech A je symetrická matica, jej vlastné hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sú zoradené vzostupne podľa veľkosti a k nim prislúchajú ortonormálne vlastné vektory $x_1, x_2, \dots, x_n$. Nájdite minimum a maximum výrazu

$$R(u) = \frac{u^TAu}{u^Tu}, \qquad \text{pre} \quad u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0.$$

Využite fakt, že každé $u \in \mathbb{R}^n$ sa dá zapísať ako $u = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$.

Ďalšie príklady

9. (6.2.18) Z rozkladu $A = R^TR$ ukážte, že pre kladne definitné matice platí $\det A \leq a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
Pomôcka: Druhá mocnina dĺžky j-teho stĺpca matice R bude práve zložka a_{jj} v matici A, tiež treba použiť vzťah *determinant = objem.*

10. (6.2.19)(*L'japunovov test stability*) Predpokladajme, že $AM + M^HA = -I$ pre nejakú kladne definitnú maticu A. Ak $Mx = \lambda x$, ukážte, že $\operatorname{Re}\lambda < 0$.
Pomôcka: Vynásobte maticovú rovnosť x^H a x.

11. (6.3.4) Je pravdou, že ak sú všetky pivoty matice väčšie ako 1, potom aj jej vlastné hodnoty sú väčšie ako 1? Overte na tridiagonálnych maticiach s diagonálami -1, 2, -1.

12. (6.3.6) Algebraický dôkaz Sylvestrovho zákona zotrvačnosti prebieha nasledovne.
Rovnako ako na prednáške predpokladáme, že A a C^TAC nemajú nulové vlastné hodnoty. Potom nech $x_1, \dots, x_p$ sú ortonormálne vlastné vektory matice A zodpovedajúce kladným vlastným hodnotám

$\lambda_i > 0$, $y_1, \ldots, y_q$ sú ortonormálne vlastné vektory matice $C^T AC$ zodpovedajúce záporným vlastným hodnotám $\mu_i < 0$.

a) Aby sme ukázali, že vektory $x_1, \ldots, x_p, Cy_1, \ldots, Cy_q$ sú lineárne nezávislé, predpokladajme, že nejaká ich kombinácia dá nulu:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = b_1 Cy_1 + \cdots + b_q Cy_q (= z, \text{povedzme}).$$

Ukážte, že $z^T Az = \lambda_1 a_1^2 + \cdots + \lambda_p a_p^2 \geq 0$ a tiež $z^T Az = \mu_1 b_1^2 + \cdots + \mu_q b_q^2 \leq 0$.

b) Odvoďte z toho, že všetky a_i aj b_i musia byť nulové, čo znamená lineárnu nezávislosť. Z toho ukážte, že $p + q \leq n$.

c) Rovnaký argument môžme použiť pre $n-p$ záporných vlastných hodnôt matice A a $n-q$ kladných vlastných hodnôt matice $C^T AC$. To dá $n-p+n-q \leq n$. Ukážte, že potom $p+q = n$ a zákon zotrvačnosti naozaj platí.

13. (6.3.7) Ak je C regulárna matica, ukážte, že A a $C^T AC$ majú rovnakú hodnosť. Teda nula ako vlastná hodnota má pre obe matice rovnakú násobnosť.

14. (6.3.8) Experimentovaním zistite signatúru $2n \times 2n$ matice

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

kde B je regulárna $n \times n$ matica.

15. Nech A je symetrická a kladne definitná matica. Ukážte, že jej maximálne zložky sa musia nachádzať na diagonále.

16. Nech $M_{m,n}(\mathbb{R})$ označuje vektorový priestor reálnych matíc typu $m \times n$. Ukážte, že $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$ je kladne definitná symetrická bilineárna forma na $M_{m,n}(\mathbb{R})$ – t.j. je to skalárny súčin (Pozn. tr značí stopu – súčet diagonálnych zložiek matice). Nájdite ortonormálnu bázu priestoru matíc vzhľadom na túto formu, povedzme pre $(m, n) = (2, 3)$. Ako by sa situácia zmenila ak by sme definovali $\langle A, B \rangle' = \operatorname{tr}(AB^T)$? Ako by sme dostali (hermitovský) skalárny súčin na komplexnom vektorovom priestore $M_{m,n}(\mathbb{C})$?

17. Tzv. zovšeobecnený problém vlastných hodnôt je daný rovnicou $Ax = \lambda Mx$, kde A a M sú dve $n \times n$ matice. Ukážte, že takéto λ sa dajú nájsť ako korene polynómu $\det(A - \lambda M)$ stupňa n v premennej λ.

Predpokladajme navyše, že $M = R^T R$, t.j. M je kladne definitná. Zmenou súradníc $y = Rx$ ukážte, že $Ax = \lambda Mx$ práve vtedy, keď $(R^T)^{-1} AR^{-1} y = \lambda y$, t.j. λ je (obvyklou) vlastnou hodnotou matice $(R^T)^{-1} AR^{-1} = C^T AC$. (Pozri str. 343-345 v knižke)