

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia.
Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej algebr a geometrie I., 15. november 2017

1. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- nájdite dimenzie a bázy jej nulového priestoru $\mathcal{N}(A)$ a stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$,
- nájdite rovnicu/e, ktorú/é musia spĺňať zložky vektora $b \in \mathcal{S}(A)$.
- pre (každé) $b \in \mathcal{S}(A)$ nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = b$.

2. a) Rozhodnite pre aké parametre a, b je nasledujúca matica regulárna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ a & 0 & b & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Pre regulárnu A nájdite k nej inverznú A^{-1} .

3. Vo vektorovom priestore $M_{3,3}$ matíc typu 3×3 uvažujeme podpriestor $S_{3,3}$ tvorený maticami, v ktorých sú súčty zložiek po riadkoch aj stĺpcoch rovnaké (všetkých šesť súčtov).

- Ukážte, že $S_{3,3}$ je naozaj podpriestor priestoru $M_{3,3}$.
- Nájdite dimenziu $S_{3,3}$.
- Ukážte, že šesť permutačných matíc typu 3×3 patrí do $S_{3,3}$. Dá sa z nich vybrať báza $S_{3,3}$?
- Na základe predchádzajúcich častí ukážte, že jednotková matica I je lineárnou kombináciou zvyšných piatich permutačných matíc.

4. a) Nech $\alpha, \beta : U \rightarrow V$ sú dve lineárne transformácie medzi vektorovými priestormi U a V . Ukážte, že aj ich súčet $\alpha + \beta$ a rozdiel $\alpha - \beta$ budú lineárnymi transformáciami.

b) Ukážte, že id a T dané predpismi $id : A \mapsto A$, resp. $^T : A \mapsto A^T$ sú lineárnymi transformáciami $M_{n,n}(\mathbb{R})$ na seba.

c) Nájdite jadro a obraz lineárnej transformácie $2 \cdot id + ^T : M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ danej predpisom $A \mapsto 2A + A^T$.

5. Nech U a V sú vektorové podpriestory vektorového priestoru X . Ukážte, že aj ich prienik $U \cap V$ je vektorovým podpriestorom X .