Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry I., 20.12.2017

1. Nech V je podpriestor $\mathbb{R}^4$ generovaný vektormi $(1,1,-1,-1)^T$ a $(1,-1,-1,1)^T$.
a) Nájdite otrogonálny doplnok $V^\perp$ a jeho ortonormálnu bázu.
b) Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor V.
c) Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $V^\perp$.
d) Nájdite projekciu vektora $(1,0,-1,0)^T$ na V, vysvetlite.

2. Nech V a W sú podpriestory $\mathbb{R}^4$ generované vektormi $V = \mathrm{span}[(1,3,1,1)^T, (1,1,1,3)^T, (1,3,3,1)^T]$ a $W = \mathrm{span}[(1,1,3,1)^T, (3,1,1,1)^T]$. Nájdite dimenzie a bázy podpriestorov $V+W$ a $V \cap W$.

3. Ukážte, že transformácia z $P_4(t)$ do $P_6(t)$, ktorá každému polynómu priradí jeho (t^2+1)-násobok je lineárna. Nájdite jej maticu pre zvolené bázy $P_4(t)$ a $P_6(t)$. Popíšte aké bude mať táto transformácia jadro a obraz.

4. Nech $\alpha : U \to V$ je lineárna transformácia medzi vektorovými priestormi U a V. Majme vektory $x_1, x_2, \ldots, x_k \in U$ a predpokladajme, že ich obrazy $\alpha(x_1), \alpha(x_2), \ldots, \alpha(x_k)$ sú lineárne nezávislé. Dokážte, že potom aj vektory $x_1, x_2, \ldots, x_k$ musia byť lineárne nezávislé.

5. Nájdite determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+b & a+c \\ 1 & b+a & 0 & b+c \\ 1 & c+a & c+b & 0 \end{bmatrix}.$$