Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Opravná písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie I., 23. január 2018

1. *(5 bodov)* Majme vektory $u_1 = [0,1,1,1,0]^T$, $u_2 = [1,-1,0,-1,1]^T$, $u_3 = [1,1,1,1,1]^T$ a $v_1 = [2,1,2,1,2]^T$, $v_2 = [1,2,1,2,1]^T$, $v_3 = [1,2,3,2,1]^T$, $v_4 = [3,2,1,2,3]^T$ v $\mathbb{R}^5$.

a) Rozhodnite, či vektory u_1, u_2, u_3 a vektory v_1, v_2, v_3, v_4 generujú ten istý priestor.

b) Nájdite bázu a dimenziu $\mathrm{span}[v_1, v_2, v_3, v_4]^\perp$.

c) Nájdite nejakú ortonormálnu bázu priestoru $\mathrm{span}[v_1, v_2, v_3, v_4]$.

d) Nájdite maticu kolmej projekcie na $\mathrm{span}[v_1, v_2, v_3, v_4]$.

2. *(5 bodov)* Pre $n \times n$ maticu A a skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ (lambda) definujme množiny

$$V_\lambda(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\} \qquad \text{a} \qquad V_\lambda(A^T) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^T x = \lambda x\}.$$

a) Ukážte, že $V_\lambda(A)$ a $V_\lambda(A^T)$ sú vektorové podpriestory $\mathbb{R}^n$.

b) Ukážte, že $V_\lambda(A)$ a $V_\lambda(A^T)$ majú rovnakú dimenziu.

c) Aká je dimenzia $V_0(A)$ pre regulárnu maticu A? (t.j. $\lambda = 0$).

3. *(6 bodov)* Nech $\mathcal{P}_n[x]$ je vektorový priestor polynómov premennej x stupňa nanajvýš n s reálnymi koeficientami.

a) Ukážte, že 1, $1+x$, $(1+x)^2$, $\dots$, $(1+x)^n$ je bázou $\mathcal{P}_n[x]$, označme $\mathcal{B}_n$.

b) Ukážte, že zobrazenie $m : \mathcal{P}_n[x] \to \mathcal{P}_{n+1}[x]$ dané predpisom $m : p(x) \mapsto xp(x)$ je lineárne.

c) Nájdite maticu zobrazenia m vzhľadom na bázy $\mathcal{S}_n = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ a $\mathcal{S}_{n+1} = \{1, x, x^2, \dots, x^{n+1}\}$.

d) Nájdite maticu zobrazenia m vzhľadom na bázy $\mathcal{B}_n$ a $\mathcal{B}_{n+1}$ z časti a).

4. *(5 bodov)* Majme $2n \times 2n$ maticu M tvaru $M = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$, kde každý z blokov A, B, C, D je $n \times n$ matica. Predpokladajme, že A je regulárna a platí $AC = CA$. Ukážte, že potom $\det M = \det(AD - CB)$. Musí potom platiť aj $\det M = \det(DA - BC)$?

5. *(15 bodov)* Pravda/Nepravda. So zdôvodnením v pravdivom prípade a protipríkladom v nepravdivom:

a) Matice typu $n \times n$, ktorých nulový aj ľavý nulový priestor obsahuje vektor $(1, 1, \dots, 1)^T$ tvoria podpriestor $M_{n,n}$.

b) Ak je pre matice $A_{m\times n}$ a $B_{n\times m}$ ich súčin AB regulárna matica, potom $n \geq m$.

c) Ak pre $n \times n$ matice A, B a $v \neq 0$ platí $Av = Bv$, potom $\det(A - B) = 0$.

d) Pre regulárnu maticu A a štvorcovú B platí $\det(ABA^{-1}) = \det B$.

e) Pre $m \times n$ maticu A a každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^T A^T A x \geq 0$.

f) V priestore polynómov $\mathcal{P}(x)$ je zobrazenie dané predpisom $\alpha : p(x) \mapsto p(x^2)$ lineárne.

6. *(4 body)* Nájdite determinant $(n+1) \times (n+1)$ matice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$