Algebra II. – Domáca úloha č. 1

Cvičenia v týždni 19. februára 2007

Cvičenia sú prevažne z knihy Algebra a teoretická aritmetika, strany 135, 140-141.

1. Nájdite všetky lineárne transformácie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ktoré zobrazujú priamku $y = x$ na priamku $y = 3x$.

2. Polynómy v jednej premennej x s koeficientami v $\mathbb{R}$ stupňa nanajvýš n tvoria vektorový priestor P_n nad $\mathbb{R}$. Nájdite jeho dimenziu a prirodzenú bázu. Ukážte, že diferenciálny operátor $\frac{d}{dx} : P_n \to P_{n-1}$ (daný tradičnou deriváciou $p(x) \mapsto p'(x)$) je lineárne zobrazenie. Nájdite jeho maticu vzhľadom na prirodzené bázy priestorov P_n a P_{n-1}, ako aj $\mathrm{Ker}(\frac{d}{dx})$ a $\mathrm{Im}(\frac{d}{dx})$.

3. Overte, že transformácie f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 a f_6 dané predpismi $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_5(x) = 1 - \frac{1}{x}$ a $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$ tvoria grupu transformácií množiny $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Zostavte tabuľku grupovej operácie a zistite či je táto grupa komutatívna.

4. Overte, že transformácie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dané predpisom $f(x) = \sqrt[k]{x^k}$ pre $n, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tvoria grupu. Zistite, či je táto grupa komutatívna.

5. Rozhodnite či množina všetkých transformácií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daných predpisom $f(x) = ax + b$ tvorí grupu ak:

a) $a, b \in \mathbb{Q}$,
b) $a = 1$, $b \in 2\mathbb{Z}$ (b je párne),
c) $a = 1$, $b \in 2\mathbb{Z} + 1$,
d) $a \neq 0$, $a \in \mathbb{Q}$, $b = 0$,
e) $a \neq 0$, $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}$,
f) $a \neq 0$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{R}$,
g) $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Q}$,
h) $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \notin \mathbb{Q}$.

Ktoré z grúp sú komutatívne?

6. Dokážte, že v grupe $(G, *)$ platí

a) $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$,
b) $(x^{-1})^{-1} = x$,
c) $x * y = y * x$ práve vtedy, ak $x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$,
d) ak $x * x = e$ pre všetky $x \in G$, tak G je komutatívna.

7. Nech $*$ je asociatívna binárna operácia na neprázdnej množine G a nech každá rovnica tvaru $a * x = b$ alebo $y * a = b$ má pre ľubovoľné $a, b \in G$ riešenie. Dokážte, že:

a) existuje pravý neutrálny prvok $d \in G$ taký, že pre všetky $a \in G$ platí $a * d = a$,
b) existuje ľavý neutrálny prvok $e \in G$ taký, že pre všetky $a \in G$ platí $e * a = a$,
c) ak d je pravý neutrálny prvok a e je ľavý neutrálny prvok v G, tak $d = e$,
d) $(G, *)$ je grupa.

8. Nech $\varphi : G_1 \to G_2$ je izomorfizmus grúp a nech e_1 a e_2 sú ich neutrálne prvky. Dokážte, že

a) $\varphi(e_1) = e_2$,
b) pre každé $a \in G_1$ platí $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.

9. Rozhodnite či sú nasledujúce dvojice grúp izomorfné:

a) grupa symetrií rovnostranného trojuholníka D_3 a grupa S_3 všetkých permutácií množiny $\{1, 2, 3\}$,
b) grupa symetrií D_4 a grupa S_4,
c) $(\mathbb{Z}_7 - \{0\}, \cdot)$ a $(\mathbb{Z}_6, +)$,
d) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ a $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$,
e) $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ a $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$,
f) $(\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{C}, +)$,
g) $(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_2, +)$ a $(\mathbb{Z}_4, +)$.

10. Predpokladajme, že v grupe G platí $xyz = e$ (e je neutrálny prvok v G). Platí potom $yzx = e$? A $yxz = e$?

11. Ukážte, že $GL_n(\mathbb{R})$ (množina všetkých invertovateľných reálnych matíc typu $n \times n$) je grupa. Podobne pre $GL_n(\mathbb{Q})$. Platí takéto tvrdenie pre $GL_n(\mathbb{Z})$?