Algebra II. – Domáca úloha č. 4

Cvičenia v týždni 12. marca 2007

Domácou úlohou zostávajú príklady č. 12b) a 14 z úlohy č. 3.
Ďalšie príklady sú prevažne z knihy Algebra a teoretická aritmetika, strany 149,150.

1. Nájdite rozklad grupy G na triedy podľa podgrupy H:
a) $G = (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ a $H = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$,
b) $G = (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ a $H = \mathbb{R}^+$,
c) $G = (\mathbb{R}, +)$ a $H = \mathbb{Z}$,
d) $G = \mathbb{Z}$ a $H = p\mathbb{Z}$,
e) $G = (\mathbb{R}^2, +)$ a $H = \{(2x, x); x \in \mathbb{R}\}$,
f) $G = (\mathbb{Z}^2, +)$ a $H = 3\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$,
g) $G = GL_n(\mathbb{Z}_2) = \{$regulárne matice typu 2×2 nad $\mathbb{Z}_2\}$ a H je generovaná $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
h) $G = \{$regulárne horné trojuholníkové matice typu 2×2 nad $\mathbb{Z}_3\}$ a $H = \{$diagonálne matice$\}$.
i) $G = \{$regulárne horné trojuholníkové matice typu 3×3 nad $\mathbb{Z}_2\}$ a H je generovaná $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

2. Dokážte, že pre ľubovoľné $a, b, c \in G$ a pre triedy grupy G podľa H platí:
a) $Ha = Hb$ práve vtedy, keď $ab^{-1} \in H$,
b) ak $Ha = Hb$, potom $Hac = Hbc$.

3. V grupe S_3 nájdite podgrupu H a prvok a tak, aby $aH \neq Ha$.

4. Dokážte, že každá grupa, ktorej počet prvkov je p^m (p je prvočíslo), obsahuje p-prvkovú podgrupu.

5. a) Pre cyklické grupy rádov 5, 6, 8 a 10 zistite, koľko z ich prvkov je generátorom celej grupy.
b) Koľko z prvkov cyklickej grupy rádu n ju generuje celú?

6. Ukážte, že v grupe s párnym počtom prvkov existuje prvok rádu 2.

7. Dokážte, že v každej šesťprvkovej grupe existujú práve dva prvky rádu 3.

8. Nech H je podgrupa grupy G. Označme $HaH = \{hag; h, g \in H\}$ pre $a \in G$. Dokážte, že pre $a, b \in G$ máme $HaH = HbH$ alebo HaH, HbH sú disjunktné množiny.

9. Ukážte, že jadro aj obraz grupového homomorfizmu sú podgrupami.

10. Nech G je komutatívna (multiplikatívna) grupa. Ukážte, že n-té umocnenie $\varphi : G \to G$ definované ako $\varphi(x) = x^n$ je grupový homomorfizmus.

11. a) Nech G je komutatívna grupa s nepárnym počtom prvkov. Ukážte, že zobrazenie $\varphi : G \to G$ dané $\varphi(x) = x^2$ je izomorfizmus (resp. *automorfizmus*, kedže ide o zobrazenie G samej na seba).
b) Zovšeobecnite výsledok z časti a).

12. a) Ukážte, že v S_6 (grupe premutácií šestprvkovej množiny) existujú prvky rádov 1, 2, 3, 4, 5 a 6, ale nie vyšších.
b) Ukážte, že v S_7 okrem prvkov rádov 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7, existujú aj prvky rádov 10 a 12.

13*. Nech $|G| = n$ a prvočíslo p delí n. Ukážte, že v G existuje prvok rádu p.