Algebra II. – Domáca úloha č. 5

Cvičenia v týždni 19. marca 2007

Domácou úlohou zostávajú príklady č. 7, 9 a 12 z úlohy č. 4.
Ďalšie príklady sú prevažne z knihy Algebra a teoretická aritmetika, strany 155, 158.

1. Nájdite všetky normálne podgrupy v danej grupe a) $\mathbb{Z}_4$, b) $\mathbb{Z}_5$, c) $\mathbb{Z}_{12}$, d) D_4, e) S_3, f) S_4, g) $GL_2(\mathbb{Z}_2)$, h) $G = \{$regulárne horné trojuholníkové matice typu 3×3 nad $\mathbb{Z}_2\}$, i) $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, kde i, j, k sú jednotkové kvaternióny (pozri str. 194 v ATA)

2. Overte, či je H normálna podgrupa grupy G a nájdite faktorovú grupu G/H.
a) $G = D_4$, $H = C_4$,
b) $G = D_4$, $H = C_2$,
c) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $H = \{(n, m, 0); n, m \in \mathbb{Z}\}$,
d) $G = S_3$, $H = [(12)]$,
e) $G = GL_2(\mathbb{Z}_p)$, $H = SL_2(\mathbb{Z}_p)$ - matice nad $\mathbb{Z}_p$ s determinantom 1.

3. Rozhodnite či sú príslušné grupy izomorfné. Ak áno, nájdite príslušný izomorfizmus explicitne.
a) $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,
b) $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)/\{\pm 1\} \simeq (R^+, \cdot)$,
c) $\mathbb{Z}_{24}/[4] \simeq \mathbb{Z}_n$ (nájdite n),
d) $S_3/[(123)] \simeq D_2/C_2 \simeq \mathbb{Z}_2$.

4. Nech prvky a, b komutatívnej grupy sú rádov m, n, a navyše platí $[a] \cap [b] = \{e\}$. Čo sa dá povedať o ráde súčinu ab?

5. Nasledujúce súčiny permutácií vyjadrite v tvare súčinov disjunktných cyklov a určite ich rád:
a) (123)(4561)(23456)(25),
b) (12)(34)(23)(1234)(13),
c) (1234)(567)(1537).

6. Vypočítajte φ^{120}, kde
a) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,
b) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Dokážte, že ak čísla k, m patria do toho istého cyklu v permutácii φ, tak po vynásobení transpozíciou (km) zľava alebo sprava sa daný cyklus rozpadne na dva disjunktné cykly. Ak čísla k, m patria do rôznych disjunktných cyklov permutácie φ, tak po vynásobení transpozíciou (k, m) sa uvedené cykly spoja do jednoho cyklu.

8. Dokážte, že cyklus dĺžky k je párna permutácia práve vtedy, keď k je nepárne. Tiež dokážte, že parita súčinu cyklov je párna práve vtedy, keď sa medzi nimi nachádza párny počet cyklov párnej dĺžky.

9. a) Nech H je podgrupou grupy G a $g \in G$. *Konjugovaná podgrupa* gHg^{-1} je definovaná ako množina všetkých konjugovaných prvkov ghg^{-1} pre $h \in H$. Ukážte, že gHg^{-1} je podgrupou grupy G. Tiež ukážte, že exsituje automorfizmus $\varphi : G \to G$, ktorý zobrazuje H na gHg^{-1}.
b) Ukážte, že podgrupa H grupy G je normálna práve vtedy, keď $gHg^{-1} = H$ pre všetky $g \in G$.

10. a) Ukážte, že vlastnosť "x je konjugovaným prvkom k y" v grupe G je relácia ekvivalencie na G.
b) Opíšte prvky a, ktorých trieda konjugácie pozostava iba z prvku a.

11. Nech Z je množina všetkých prvkov $z \in G$, ktoré komutujú so všetkými prvkami $a \in G$, t.j. $z \in Z$ práve vtedy, keď pre všetky $a \in G$ platí $az = za$. Množina Z sa nazýva *centrum* grupy G.
a) dokážte, že Z je normálnou podgrupou grupy G,
b) dokážte, že G/Z je izomorfná grupe vnútorných izomorfizmov grupy G (t.j. izomorfizmov daných konjugáciou, pozri tiež str. 140 v ATA)