Algebra II. – Domáca úloha č. 6

Cvičenia v týždni 26. marca 2007

Domácou úlohou zostávajú príklady č. 9, 10, 11 (ako bonusové) z úlohy č. 5.
Ďalšie príklady sú prevažne z knihy Algebra a teoretická aritmetika, strany 180.

1. Overte, že $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (funkcie z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$), $M_n(F)$ (matice typu $n \times n$ nad poľom F), $\mathbb{Z}_n$, $F[x]$ (polynómy v premennej x nad poľom F), $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ sú okruhy.

2. Dokážte, že v okruhoch $\mathbb{R}^n$ (pre $n > 1$), $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $A \times B$ (kde A, B sú ľubovoľné okruhy s aspoň dvoma prvkami) existujú delitele nuly.

3. Dokážte, že potenčná množina $\mathcal{P}(X)$ (množina všetkých podmnožín množiny X) je okruh, ak zavedieme sčítanie a násobenie nasledujúcim spôsobom:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A) \qquad \text{(symetrický rozdiel)}$$
$$AB = A \cap B$$

4. Ukážte, že matice $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ sú konjugované v grupe $GL_2(\mathbb{R})$. T.j. nájdite maticu B, aby platilo $BA_1B^{-1} = A_2$.

5. Ukážte, že zobrazenie dané predpisom $A \mapsto (A^T)^{-1}$ je automorfizmom grupy $GL_n(\mathbb{R})$.

6. Nech grupy G a G' sú konečné a majú nesúdeliteľné počty prvkov. Ukážte, že medzi nimi existuje iba triviálny homomorfizmus $\varphi : G \to G'$ daný $\varphi(x) = 1$ pre všetky x z G.

7. Nech H a K sú podgrupy grupy G. Dokážte, že prienik dvoch tried $Hx \cap Ky$ je buď prázdny, alebo je triedou rozkladu podľa podgrupy $H \cap K$.

8. Nech G a H sú nasledujúce podgrupy grupy $GL_2(\mathbb{R})$:

$$G = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}, \qquad H = \{\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid x > 0\}.$$

Prvok grupy G sa dá vyjadriť ako bod (x, y) roviny $\mathbb{R}^2$. Nakreslite rozklad roviny na ľavé a pravé triedy podľa H.

9. Dokážte, že pole $\mathbb{C}$ je izomorfné s okruhom matíc tvaru $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ pre $a, b \in \mathbb{R}$.

10. Rozhodnite či platia tieto výroky:

a) každý podokruh poľa je pole \qquad b) každý nadokruh poľa je pole

11. Nech $\varphi : G \to G'$ je grupový homomorfizmus s jadrom K, a nech H je nejaká iná podgrupa grupy G. Opíšte $\varphi^{-1}(\varphi(H))$ pomocou H a K.

12. Dokážte, že nasledujúce dvojice okruhov sú izomorfné:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(-\sqrt{2})$, b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6$, c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}((-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)\sqrt[3]{2})$.

13. Nájdite všetky automorfizmy poľa

a) $\mathbb{Q}$ b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

14. Overte, že nasledujúce 4 matice typu 2×2 nad $\mathbb{Z}_2$ tvoria pole $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Ukážte, že toto pole nie je izomorfné s okruhmi $\mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.