Algebra II. – Domáca úloha č. 7, predveľkonočná sada

Cvičenia v týždni 2. apríla 2007

Domácou úlohou zostávajú príklady č. 12 a 13 z úlohy č. 6.

1. a) Opíšte grupu transformácií tenisovej loptčky (t.j. transformácií priestoru $\mathbb{R}^3$, ktoré zobrazia ideálnu tenisovú loptičku samu na seba – šev na šev).

Ktoré z nich vieme realizovať v bežnom trojrozmernom priestore a ktoré nie? Prečo?

b)* Ako to bude s grupou transformácií klasickej basketbalovej, futbalovej či volejbalovej lopty (neberúc do úvahy ventil, nápisy a iné "nedokonalosti")? Ako pre frisbie?

c)** Aká je grupa transformácií vajíčka? Nekonečného korbáča spleteného z ôsmich (nekonečných) prútikov?

2. a) Ukážte, že množina symbolov $\{a + bi|\, a, b \in \mathbb{Z}_3\}$ tvorí pole s deviatimi prvkami, ak zákony binárnych operácií kopírujú sčítanie a násobenie komplexných čísel.

b) Bude podobný postup fungovať pre $\mathbb{Z}_5$? Pre $\mathbb{Z}_7$? Vysvetlite.

3. a) Aké sú (multiplikatívne) rády matíc $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, ak ich berieme ako prvky $GL_2(\mathbb{R})$?

b) aké budú rády tých istých matíc ak sa na ne pozrieme ako na prvky $GL_2(\mathbb{Z}_7)$?

4. Opíšte explicitne najmenší podokruh (s jednotkou) poľa $\mathbb{C}$, ktorý obsahuje $\sqrt[3]{2}$ (reálne číslo).

5. Nech $\alpha = \frac{1}{2}i$. Ukážte, že prvky $\mathbb{Z}[\alpha]$ tvoria hustú podmnožinu komplexnej roviny.

6. Nech $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ označuje podokruh poľa $\mathbb{C}$ obsahujúci $\mathbb{Q}$, $\alpha = \sqrt{2}$ a $\beta = \sqrt{3}$. Ukážte, že pre $\gamma = \alpha + \beta$ platí $\mathbb{Q}[\alpha, \beta] = \mathbb{Q}[\gamma]$.

7. Dokážte, že v okruhu s jednotkou sa charakteristika okruhu rovná charakteristike jednotky.