Algebra II. – Domáca úloha č. 8, veľkonočná sada

Cvičenia v týždni 9. apríla 2007

Úlohy čiastočne z ATA, strany 184,188.

1. Nech F je pole, ktoré nemá charakteristiku 2 a $x^2+bx+c=0$ je kvadratická rovnica s koeficientami z poľa F. Predpokladajme, že diskriminant b^2-4c je štvorcom v poli F, t.j. existuje prvok $\delta \in F$ taký, že $\delta^2 = b^2-4c$. Ukážte, že prvok daný formulou $x = (-b+\delta)/2$ je riešením kvadratickej rovnice v F, a ak diskriminant nie je štvorcom, potom rovnica nemá riešenie v F.

2. V nasledujúcich prípadoch rozhodnite, či je množina S podokruhom okruhu R:
a) S je množina racionálnych čísel tvaru $\frac{a}{b}$, kde b nie je deliteľné 3 a R je $\mathbb{Q}$,
b) S je množina všetkých lineárnych kombinácií funkcií $\{1, \cos nt, \sin nt \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ a R je množina všetkých funkcií $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
c) (nekomutatívny okruh) S je množina reálnych matíc tvaru $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ a R je množina všetkých reálnych matíc typu 2×2.

3. Majme obor integrity D s charakteristikou p. Uvažujme množinu D^p všetkých p-tych mocnín prvkov z D. Ukážte, že:
a) zobrazenie $a \mapsto a^p$ je homomorfizmus okruhov D a D^p (vhodne použite binomickú vetu),
b) zobrazenie $a \mapsto a^p$ je izomorfizmus okruhov D a D^p (uvažujte prvky, pre ktoré $a^p = 1$),
c) ak D je konečná množina, potom $D = D^p$.

4. Zostrojte podielové polia k oborom integrity

$$\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \,|\, a,b \in \mathbb{Z}\}, \qquad \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \,|\, a,b,c \in \mathbb{Z}\}.$$

5. Ukážte, že súčin všetkých nenulových prvkov v $\mathbb{Z}_p$ je -1.

6. Uvažujme sústavu $Ax = b$ s n rovnicami a n neznámymi, kde A a b majú celočíselné koeficienty. Dokážte alebo vyvráťte: ak má sústava celočíselné riešenie, potom má riešenie aj ako sústava v $\mathbb{Z}_p$ (pre každé p).

7. Opíšte delitele jednotky v nasledujúcich okruhoch:

a) $\mathbb{Z}_{12}$ b) $\mathbb{Z}_7$ c) $\mathbb{Z}_8$ d) $\mathbb{Z}_n$

8. Množina *formálnych mocninných radov* $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$, tvorí okruh značený $\mathbb{Z}[[t]]$. (Pojmom *formálny mocninný rad* myslíme to, že nemáme žiadnu podmienku na konvergenciu.)
a) ukážte, že formálne mocninné rady tvoria okruh,
b) ukážte, že rad $p(t)$ je invertovateľný práve vtedy ak $a_0 = \pm 1$.

9. V okruhu polynómov $\mathbb{Z}[x]$ opíšte ideály generované prvkami 2 a x – značíme ich (2) a (x). Ukážte, že $(2) \cap (x) = (2x)$.

10. Opíšte jadro zobrazenia $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{R}$ dané predpismi $1 \mapsto 1$ a $x \mapsto 1 + \sqrt{2}$.

11. V okruhu *Gaussových celých čísel* $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \,|\, a,b \in \mathbb{Z}\}$ opíšte ideál $(1+2i)$. Znázornite jeho prvky v komplexnej rovine.
Akú (aditívnu) grupu dostaneme faktorizáciou $\mathbb{Z}[i]/(1+2i)$, ak sa na $\mathbb{Z}[i]$ a $(1+2i)$ pozrieme ako na aditívne grupy? Zdedí táto grupa aj multiplikatívnu štruktúru z okruhu $\mathbb{Z}[i]$?

12. Okruh $\mathbb{Z}$ je podokruhom poľa $\mathbb{R}$. Ak sa na $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$ pozrieme ako na aditívne grupy, môžeme vytvoriť faktorovú grupu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ zloženú zo "zvyškov za desatinnou čiarkou".
Ukážte, že takáto grupa nezdedí multiplikatívnu štruktúru z $\mathbb{R}$. Vysvetlite.