Algebra II. – Domáca úloha č. 9

Cvičenia v týždni 16. apríla 2007

---

Domácou úlohou zostáva aj príklad č. 9 z úlohy č. 8.

**1.** Zistite, či sú nasledujúce zobrazenia homomorfizmy okruhov. Určte jadro a obraz každého homomorfizmu.
a) $\varphi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\varphi_1 : a + bi \mapsto a$,
b) $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi_2 : (a, b) \mapsto a$,
c) $\varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi_3 : a \mapsto a + 0i$,
d) $\varphi_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$, $\varphi_4 : a \mapsto [a]$,
e) $\varphi_5 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_6$, $\varphi_5 : [a] \mapsto [3a]$,

**2.** Ukážte, že v okruhu Gaussových celých čísel $\mathbb{Z}[i]$ sú delitele jednotky práve prvky $\{\pm 1, \pm i\}$.

**3.** Nájdite delitele jednotky v okruhu polynómov $\mathbb{R}[x]$.

**4.** Pre ktoré $n$ delí $x^2 + x + 1$ polynóm $x^4 + 3x^3 + x^2 + 6x + 10$ v $\mathbb{Z}_n[x]$?

**5.** a) Prvok $x$ okruhu $R$ sa nazýva *nilpotentný* ak je jeho niektorá mocnina 0. Ukážte, že ak je $x$ nilpotentný, potom je $1 + x$ deliteľ jednotky v $R$.
b) Nech $R$ je okruh charakteristiky $p$. Ukážte, že ak je $a$ nilpotentný prvok, potom $1+a$ je *unipotentný* prvok – teda niektorá mocnina $1 + a$ sa rovná 1.

**6.** Dokážte alebo vyvráťte: ak $a^2 = a$ pre všetky $a$ v okruhu $R$, potom má $R$ charakteristiku 2.

**7.** Nájdite nasledujúce faktorové okruhy: a) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 3, 3)$, b) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 3, 5)$

**8.** Nech $a, b$ sú prirodzené čísla, ktorých súčet je prvočíslo $p$. Ukážte, že $a$ a $b$ sú nesúdeliteľné.

**9.** a) Nech $a, b$ sú prirodzené čísla, $a \neq 0$, a platí $b = aq + r$, kde $0 \leq r < |a|$. Ukážte, že $\mathrm{nsd}(a, b) = \mathrm{nsd}(a, r)$.
b) Opíšte algoritmus, na základe časti a), na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa.
c) Nájdite $\mathrm{nsd}(1456, 235)$ a $\mathrm{nsd}(123456789, 135792468)$.

**10.** Nájdite najväčšieho spoločného deliteľa polynómov $x^3 - 6x^2 + x + 4$ a $x^5 - 6x + 1$.

**11.** Rozložte nasledujúce polynómy na ireducibilné členy v $\mathbb{Z}_p[x]$.
a) $x^3 + x + 1$, $p = 2$ b) $x^2 - 3x - 3$, $p = 5$ c) $x^2 + 1$, $p = 7$.

**12.** Nájdite najväčšieho spoločného deliteľa gaussových celých čísel $11 + 7i$ a $18 - i$ v $\mathbb{Z}[i]$.

**13.** Ukážte, že nasledujúce polynómy sú ireducibilné v $\mathbb{Q}[x]$.
a) $x^2 + 27x + 213$, b) $x^3 + 6x + 12$, c) $8x^3 - 6x + 1$, d) $x^5 - 3x^4 + 3$.

**14.** Rozložte polynóm $x^3 + x + 1$ na ireducibilné členy v $\mathbb{Z}_p[x]$ pre $p = 2, 3, 5$.

**15.** Nájdite všetky ireducibilné polynómy stupňa nanajvýš 3 v $\mathbb{Z}_3[x]$. (Pre uľahčenie stačí nájsť tie, ktorých koeficient pri najvyššej mocnine $x$ je 1 – tzv. *monické polynómy*).