

1. Nech p je prvočíslo. Ukážte, že $x^n - p$ je ireducibilný polynóm v $\mathbb{Q}[x]$.
 2. Rozložte polynóm $x^5 + 5x + 5$ na ireducibilné členy v $\mathbb{Q}[x]$ a v $\mathbb{Z}_2[x]$.
 3. Deľte so zvyškom:
 - a) $(4x^3 + 2x^2 + (2 - i)x + i) : (x + 1 + i)$ v $\mathbb{C}[x]$,
 - b) $(x^{82} + 1) : (x^2 + 1)$ v $\mathbb{Q}[x]$ a v $\mathbb{Z}_2[x]$.
 4. Ukážte, že platí $\text{nsd}(x^{98} + 1, x^{162} + 1) = x^2 + 1$ v $F[x]$, kde F je ľubovoľné pole.
 5. Dané sú polynómy $f(x), g(x) \in F[x]$, pričom $f(x), g(x) \neq 0$. Po vydelení polynómu $f(x)$ polynómom $g(x)$ so zvyškom v $F(x)$ dostaneme $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$. Nech $q(x) \neq 0$. Dostaneme aj pre delenie $f(x)$ polynómom $q(x)$ podiel $g(x)$ a zvyšok $r(x)$?
 6. Nech $f(x), g(x) \in F[x]$ pre F pole. Dokážte, že $\{f(x)u(x) + g(x)v(x) \mid u(x), v(x) \in F[x]\}$ je ideálom okruhu $F[x]$. Bude to hlavný ideál?
 7. Nech $p(x)$ je polynóm stupňa aspoň 1 v $F[x]$, kde F je pole. Dokážte, že $p(x)$ je ireducibilný v $F[x]$ práve vtedy, keď $p(x)$ je *prvotným prvkom* v $F[x]$, t.j. ak $p(x) \mid f(x)g(x)$ pre nejaké $f(x), g(x) \in F[x]$, potom $p(x) \mid f(x)$ alebo $p(x) \mid g(x)$.
 8. Zistite či je polynóm $x^4 + 2$ ireducibilný v $\mathbb{Z}_5[x]$.
 9. Ukážte, že $x - 1 \mid x^n - 1$ a $x^2 - 1 \mid x^{2n} - 1$ v $F[x]$ pre ľubovoľné pole F .
 10. Nech $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$. Ukážte, že ak $q(x)$ má racionálny koreň, tak je to celé číslo.
 11. Ukážte, že polynóm $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ sa dá prepísať v mocninách $(x - a)$ ako $f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \dots + c_n(x - a)^n$. Ukážte tiež, že koeficienty c_i sa dajú vyjadriť ako polynómy premenných a, a_0, a_1, \dots, a_n s celočíselnými koeficientami.
 12. Nech $c \in F$ je k -násobným koreňom polynómu $f(x)$, ($k \geq 2$). Ukážte, že c je $(k - 1)$ -násobným koreňom polynómu $Df(x)$ - derivácie polynómu $f(x)$.
 13. Ukážte, že prvok $3 + \sqrt{2}$ je v okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ deliteľom jednotky. Ukážte, že potom aj $(3 + \sqrt{2})^n$ je deliteľom jednotky.
 14. Dokážte, že $(x - 1)^3 \mid (n - 2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n - 2m)$.
- Zostávajúce resty z minulých cvičení: 8.9, 9.5, 9.7 a 9.13.