Algebra II. – Domáca úloha č. 11

Cvičenia v týždni 30. apríla 2007

Domácou úlohou zostávajú aj príklady č. 7, 11 a 13 z úlohy č. 10.

1. Nech I a J sú ideály v okruhu R. Ukážte na príklade, že $I \cup J$ nemusí byť ideál. Ukážte tiež, že $I + J = \{r \in R \,|\, r = x + y, \text{ kde } x \in I, y \in J\}$ bude ideál.

2. a) Nech I a J sú ideály v okruhu R. Ukážte, že $I \cap J$ je ideál.
b) Ukážte, že $IJ = \{r \in R \,|\, r = xy, \text{ kde } x \in I, y \in J\}$ bude ideál.
c) Nájdite také I a J, pre ktoré IJ a $I \cap J$ nebudú rovnaké.

3. Nech $f(x)$ je ireducibilný polynóm nad poľom F. Dokážte, že $\mathrm{nsd}(f(x), Df(x)) = 1$.

4. a) Nech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sú navzájom rôzne komplexné čísla. Nájdite polynóm $p(x)$ stupňa n, ktorý bude nulový v bodoch $x_1, \ldots, x_n$ a bude spĺňať $p(x_0) = 1$.
b) Nech $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$ sú komplexné čísla, pričom x_i sú navzájom rôzne. Ukážte, že existuje jediný polynóm $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ stupňa nanajvýš n, spĺňajúci $g(x_i) = y_i$ pre $i = 0, \ldots, n$. Pomocou časti a) nájdite jeho explicitné vyjadrenie.

5. Ukážte, že okruh $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ nie je Euklidovský.
Pomôcka: Čo sa dá povedať o prvku $2 - \sqrt{3}$?

6. Ukážte, že okruh $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ nie je Euklidovský.
Návod: i) Ukážte, že v $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ môžeme definovať normu,
ii) ukážte, že $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ sú v $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ireducibilné,
iii) ukážte, že v $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ "nefunguje" delenie so zvyškom pre pár 3 a $1 + i\sqrt{5}$.
iv) ukážte, že $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ nie je okruh hlavných ideálov - skúste analyzovať ideál $(3, 1 + \sqrt{5})$.

7. Opíšte faktorové okruhy $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + 1)$. Porovnajte ich vlastnosti.

8. Predpokladajme, že okruh $\mathbb{R}$ rozšírime o prvok α spĺňajúci reláciu $\alpha^2 = 1$. Ukážte, že výsledný okruh bude izomorfný s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a nájdite prvok v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zodpovedajúci prvku α.

9. Opíšte okruh, ktorý vznikne zo $\mathbb{Z}$ ak ho rozšírime o prvok α spĺňajúci relácie $2\alpha - 6 = 0$ a $\alpha - 10 = 0$.

10. Ukážte, že okruh $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ je pole, ale okruh $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x + 1)$ nie je pole.

11. a) Nech $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Ukážte, že α je koreňom nejakého polynómu s celočíselnými koeficientami stupňa nanajvýš 2.
b) Nech $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$. Ukážte, že α je koreňom nejakého polynómu s celočíselnými koeficientami stupňa nanajvýš 3.

12. Nájdite všetky automorfzimy okruhu $\mathbb{Z}[x]$.

13. Ukážte, že každý neprázdny ideál v okruhu Gaussových celých čísel obsahuje nejaké prirodzené číslo.

14. a) Nájdite všetky automorfizmy okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
b) Majme $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ a predpokladajme, že $p(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientami, ktorého je α koreňom (pozri príklad č. 11). Čo vieme povedať o obrazoch prvku α v automorfizmoch okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$? Budú koreňmi $p(x)$?