Algebra II. – Domáca úloha č. 12

Cvičenia v týždni 7. mája 2007

Domácou úlohou zostávajú aj príklady č. 7, 8, 10, 11 a 14 z úlohy č. 11.

1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich komplexných čísel sú algebraické a ktoré sú transcendentné nad poľom $\mathbb{Q}$:
a) $1+\sqrt{2}$, b) $\sqrt[3]{4}$, c) $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$, d) $\sqrt{\sqrt{2}+1}$, e) $2+3i$, f) $\pi+1$, g) π^2-1, h) $-i\sqrt[3]{2}$, i) $\sqrt{\pi}$.

2. V rozšírení $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nájdite všetky prvky, pre ktoré platí $\mathbb{Q}(a+b\sqrt{2})=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

3. a) Presvedčte sa, že polynóm $p(x)=x^2+2x+2$ je ireducibilný v $\mathbb{Q}[x]$. Uvažujme ďalej algebraické rozšírenie $\mathbb{Q}(\alpha)$, kde prvok α spĺňa rovnicu $\alpha^2+2\alpha+2=0$. Ukážte, že polynóm $p(x)$ bude reducibilný v $\mathbb{Q}(\alpha)$ a nájdite jeho rozklad na prvočinitele.
b) skúste to isté ako v časti a) pre polynóm $q(x)=x^3+3x+3$.
c)* skúste to isté ako v časti a) pre polynóm $r(x)=x^5+5x+5$.

4. Nájdite u a v, algebraické nad $\mathbb{Q}$, také, že $\mathbb{Q}(u)=\mathbb{Q}(v)$, ale u a v majú rôzne minimálne polynómy nad $\mathbb{Q}$.

5. V rozšírení $\mathbb{Q}(u)$ generovanom koreňom u polynómu $p(x)=x^3+4x^2-4x+2$ ireducibilného nad $\mathbb{Q}$ nájdite minimálne polynómy prvkov
a) u^2, b) u^3, c) u^4, d) u^5, e) $3u^2-u+1$, f) $\dfrac{1}{2u+1}$, g) $\dfrac{3u^4}{u^3+2u-1}$.

6. Ukážte, že okruh $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ **je** Euklidovský.
Pozri príklad 7.2.4 v ATA, str. 300, tiež príklady 11.5, 10.13 z DÚ.

7. Ukážte, že prvočíslo p je prvotné (ireducibilné) v $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ práve vtedy, ak je polynóm x^2-3 ireducibilný v $\mathbb{Z}_p[x]$.

8. Určte stupeň rozšírenia a nájdite bázu nad $\mathbb{Q}$:
a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$, b) $\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$, c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{25})$, d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{8})$, e) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.