Algebra II. – Domáca úloha č. 4

K prednáške 19. marca 2018

---

1. (Artin, 2.4.5, str. 72) Nech G je abelovská grupa. Ukážte, že zobrazenie umocnenia na n-tú $\phi : G \to G$ definované ako $\phi(x) = x^n$ je homomorfizmom G samej do seba.

2. (Artin, 2.4.13, str. 72) (a) Nech H je podgrupa grupy G a nech $g \in G$. *Konjugovanou podgrupou* gHg^{-1} nazveme množinu konjugovaných prvkov ghg^{-1} pre $h \in H$. Ukážte, že gHg^{-1} je naozaj podgrupou G.
(b) Ukážte, že podgrupa H je normálnou podgrupou G práve vtedy, keď $gHg^{-1} = H$ pre každé $g \in G$.

3. (Artin, 2.4.19, str. 73) Ukážte, že ak grupa obsahuje práve jeden prvok x rádu 2, potom x patrí do jej centra. *Návod:* Aký je rád gxg^{-1}?

4. (Artin, 2.5.6, str. 73) (a) Ukážte, že relácia „x je konjugované y“ je reláciou ekvivalencie v grupe G.
(b) Popíšte všetky prvky a, ktorých trieda konjugovanosti (t.j. trieda ekvivalencie) pozostáva iba z prvku a.

5. (Artin, 2.6.7, str. 74) (a) Nech G je abelovská grupa nepárneho rádu. Ukážte, že zobrazenie $\phi : G \to G$ dané predpisom $\phi(x) = x^2$ je automorfizmus.
(b) Zovšeobecnite výsledok časti a).