Vybrané partie z Algebry

- Inventúra
  - čo si predstavovať pod „algebrou" ?
    (operácie, písmenká, dovolená manipulácia, ...)
  - ktoré pojmy prichádzajú na um? ~~[illegible]~~ .
    (grupa, zobrazenie, homomorfizmus, jadro, obraz, inverzný prvok, podgrupa/podpriestor, ideál, faktorová množina, ...). / komutatívnosť, asociatívnosť, ...?
  - na čo je to užitočné? Ako to využiť v stredoškolskej/základoškolskej matematike ?

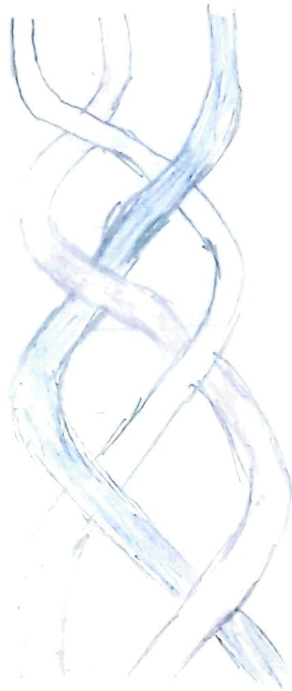
—

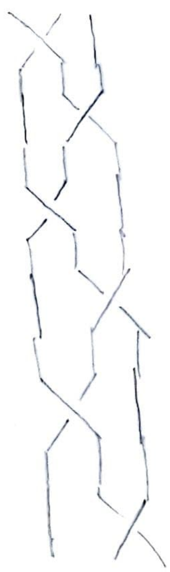
Na prvej prednáške sa budeme skôr hrať
- pripraviť sady farebných stužiek / bužírek / vlniek
  lepiacu ~~[illegible]~~ pásku, štipce

- Nejaký ~~[illegible]~~ vrkoč : - problémy - zápis
  - (Tri pramene / Štyri ?
  - prechod k permutáciám

youtube A_n is simple ?

① najprv "klasický" trojpramenňový





zápis

1/2	σ_1
3/2	σ_2^{-1}
1/2	σ_1
3/2	σ_2^{-1}
1/2	σ_1
3/2	σ_2^{-1}

Na čo si dať pozor:

- pramene by stále mali mať zvislý (pravo-ľavý) smer.
- t.j. zakážeme

niečo takéto.

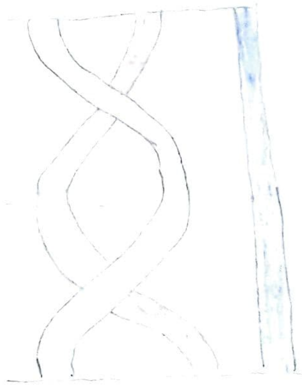
- tiež chceme aby v diagrame neboli trojité body.

t.j.  kríženie troch.

- Tiež by bolo dobré, aby dve prekríženia neboli v tej istej výške, aby sme mohli vrkoč "rozseknúť" na elementárne prekríženia.

- toto je pomerne umelá požiadavka - je dobrá pre algebraický popis, v realite často chceme symetricky t.j. [illegible] to krížilo v rovnakej úrovni.

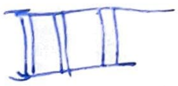
• Čo sa stane, ak zložíme $1/2$ s $2/1$?



Máme vrkoč s dvoma prekríženiami, ale keď ho potiahneme dostaneme vrkoč bez prekrížení – triviálny vrkoč.

Je tu nejaká algebra? Operácia? Stavy?

• operácia : skladanie vrkočov.

• neutrálny prvok : triviálny vrkoč 

(dostaneme to isté, ale pridáme neutr. prvok hore aj dole

– t.j. násobenie zľava/sprava.

---

zložením elementárnych prekrížení $1/2$ a $2/1$ dostaneme ~~ide~~ e, podobne ak zložíme $2/1$ a $1/2$. → preto spĺňajú

$$\boxed{a * b = b * a = e}$$

– teda $2/1$ je inverzné k $1/2$.

Pre jednoduchosť môžeme písať σ_1 ako $1/2$ a σ_1^{-1} $2/1$.

V tomto značení bude σ_k $k/k+1$ a σ_k^{-1} $k+1/k$.

Teda "klasický" cop bude mať zápis

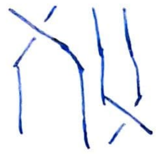
$$(\sigma_1 \sigma_2^{-1})(\sigma_1 \sigma_2^{-1})(\sigma_1 \sigma_2^{-1})(\sigma_1 \sigma_2^{-1})\ldots$$

Pletením $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \ldots$

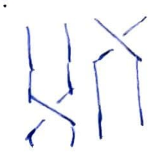
by sme tiež dostali nejaký vrkoč, aký?

② Pozrime sa teraz na situáciu so štyrmi prameňmi.

$\sigma_1 * \sigma_3$ bude vyzerať takto



a $\sigma_3 * \sigma_1$ zasa takto:



keďže prekríženia sú ~~sebou~~ navzájom neovplyvňujú, tieto diagramy prezentujú ten istý vrkoč.

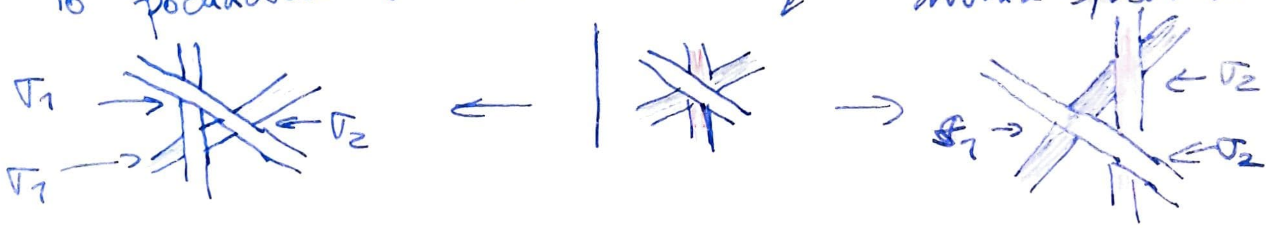
Teda máme rovnosť $\sigma_1 * \sigma_3 = \sigma_3 * \sigma_1$ (komutatívnosť)

Vo všeobecnosti $\sigma_i * \sigma_j = \sigma_j * \sigma_i$ ak $|i-j|>2$.

- Poslednou vecou, ktorú by sme mali objasniť je trojité prekríženie a vzťah.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$$

To pochádza z toho, že obrázok môžme „desingularizovať" dvoma spôsobmi



Vrkočová grupa B_n – má generátory $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$

a relácie $\sigma_i * \sigma_j = \sigma_j * \sigma_i$ ak $|i-j| \geq 2$

a $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

Ak zabudneme na zapletenie, môžeme sa pozerať na zafarbenie vrkoča navrchu a naspodu.

Potom σ_i a σ_i^{-1} bude tá istá transpozícia

a máme pravidlá: $\tau_i * \tau_j = \tau_j * \tau_i$ $|i-j| \geq 2$

$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$

a $\tau_i^2 = e$.

Tu ale vstupujú do hry <u>permutácie</u>

$\sigma_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_1^{-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

→ Permutácia - bijektívne zobrazenie n-prvkovej množiny samej
na n prvkoch
do seba.

opäť máme <u>operáciu</u>: skladanie zobrazení (zloženie bijekcií je bijekcia, inverzné zobr. k bijekcii je bijekcia)

- neutrálny prvok je identita id: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- počet permutácií : $n!$

<u>Príklad</u> S_3 - má 6 prvkov

$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- mohli by sme operáciu skladania zapísať pomocou tabuľky (veľkosti 6×6)

I ↓ II

	id	ρ	ρ^2	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}
id	id	ρ	ρ^2	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}
ρ	ρ	ρ^2	id	τ_{23}	τ_{12}	
ρ^2	ρ^2	id	ρ			
τ_{12}	τ_{12}	τ_{13}		id		
τ_{13}	τ_{13}	τ_{23}			id	
τ_{23}	τ_{23}					id

- zloženie id s hocičím je stále rovnaké (jedno či najprv / potom zľava / sprava)
- ρ a ρ^2 sú si inverzné,
- τ_{ij} sú inverzné samé sebe
- $\rho \circ \tau_{12} = \tau_{13}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ τ, ρ

$\rho \circ \tau_{13} = \tau_{23}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(3)

$\tau_{12} \circ \rho = \tau_{23}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\tau_{12} \circ \tau_{13} = \rho^2$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\tau_{13} \circ \rho = \tau_{12}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

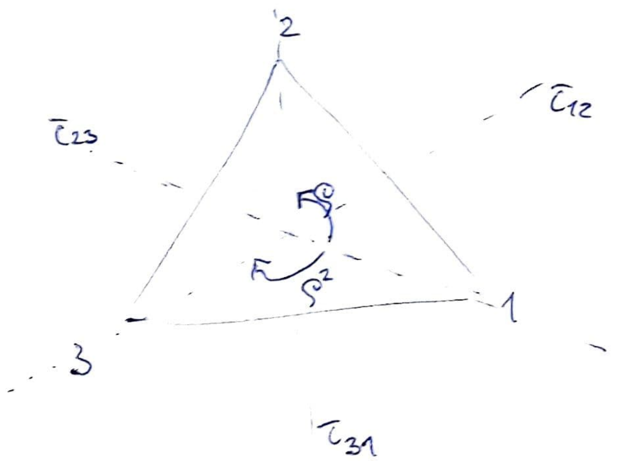
$\tau_{13} \circ \tau_{12} = \rho$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

- v každom riadku & stĺpci je všetkých šesť permutácií
  - súvis s $ax=b$ má práve jedno riešenie pre a a pravú stranu b.

- zložením transpozícií (zrkadlení) τ_{ij}, τ získavame rotáciu ρ.

(záleží na poradí – videlo sa (geometria.) toto už niekedy?)

– Kde môžeme grupu S_3 vidieť? Symetrie trojuholníka:



Nejaký zápis? (matice? komplexné čísla?)

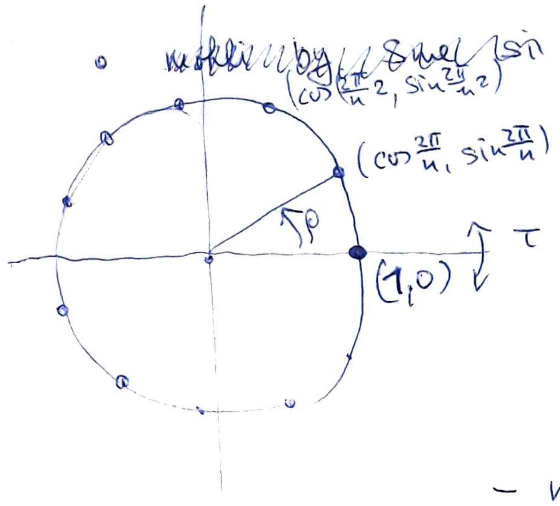
(asi sem 19.2.2018)

- Ako by to bolo pre pravidelný n-uholník?
  - máme n osových symetrií a n otočení.

  je to všetko?

(stred ide do stredu. Pri zachovanej orientácii → otočenie o uhol)
zobrazenie
– pri obrátenej – určuje os symetrie

– aké by teda boli vzťahy?



mohli by sme si pomôcť zápisom pomocou jednotkovej kružnice:

$\rightarrow$ vrcholy $\left(\cos\frac{2\pi k}{n}, \sin\frac{2\pi k}{n}\right)$

$k = \{0, \dots, n-1$

- rotácie: $\rho^n = id$
- preklopenie $(x,y) \longrightarrow (x,-y)$ $\quad \tau^2 = id$

$$\rho \circ \tau = \tau \circ \rho \; ?$$

$$\tau\rho\tau = ?\rho^{-1}$$

(Treba dať pozor na násobenie zľava/sprava)

$\rightarrow$ došli sme teda ku vzťahom:

generátory: ρ, τ, $\quad \rho^n = \tau^2 = id \quad$ a $\quad \tau\rho\tau = \rho^{-1}$

---

popisujú už túto grupu jednoznačne? Vidno z toho, že má práve $2n$ prvkov?

~~Iný pohľad~~

Môžeme si pomôcť komplexnými číslami (?)

Zvoliac $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

môžeme rotácie o $\frac{2\pi}{n}$ reprezentovať ako násobenie komplexným číslom ω. Potom fakt, že n-rotácií dá identitu zodpovedá $\omega^n = 1$.

Preklopenie/zrkadlenie? $\quad$ Dá sa: $z = a+ib \rightarrow a - ib = \bar{z}$.

Potom vzťah $\tau\rho\tau = \rho^{-1}$

môžeme interpretovať $z \xmapsto{\text{prekl.}} \bar{z} \xrightarrow{\text{otočiť}} \omega\bar{z} \xrightarrow{\text{preklopiť}} \bar{\omega}z$

lenže $\bar{\omega} = \rho\, \omega^{n-1} = \omega^{-1}$. Čiže naozaj ide o otočenie o $2\pi/n$ opačným smerom.

4 a Maticový zápis

Keďže šlo o lineárne zobrazenia roviny samej na seba, môžeme ich popísať pomocou matíc typu 2x2.

$$\rho \approx \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{4} & -\sin\frac{2\pi}{4} \\ \sin\frac{2\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{4} \end{pmatrix} \qquad \tau \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

potom

$$\tau\rho\tau \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} = \rho^{-1}$$

inverzná matica