Pri

Ak S má iba jednu orbitu, hovoríme, že akcia G je na S <u>tranzitívna</u> – t.j. každý prvok z S sa dá nejakým násobením dostať do ľubovoľného iného $s' \in S$.

<u>Stabilizátor</u> prvku $s \in S$ bude podgrupa G_s prvkov G, ktoré nechávajú s na mieste.

$$G_s = \{g \in G : gs = s\}.$$

Je to naozaj podgrupa: ~~$xs = ys \iff s = x^{-1}ys$~~

+ uzavreté na operáciu $(g_1 g_2)s = g_1(g_2 s)$
$= g_1 s = s$

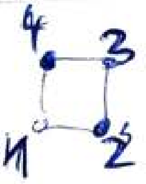
+ inverzy.

Potom máme popis:

$$xs = ys \iff s = x^{-1}ys \iff x^{-1}y \in G_s$$

t.j. dva prvky x, y majú rovnakú akciu na s, ak ich "rozdiel" $x^{-1}y$ je $stab_s$.

Príklad



D_8 – dihedrálna grupa – grupa symetrií štvorca má (~~pri pohľade na vrch~~) akciu na vrcholoch.
-> stabilizátor 1 je dvojprvkový.
-> orbita je celé S (všetky 4)

+ spraviť príklad?

(improvizácia... $\rho^4 = 1$, $\sigma^2 = 1$, $\sigma\rho = \rho^3\sigma$)

Tvrdenie. Nech S je mn. na sebe G-akčnú (je to G-množina) a s je prvkom S. Nech H je stabilizátor s a O_s je orbita s. Potom máme prirodzené bijektívne zobrazenie

$$G/H \xrightarrow{\varphi} O_s$$

dané

$$aH \longmapsto as.$$

D. ~~Najskôr ukážeme, že zobrazenie φ je kompatibilné s grupovou operáciou:~~ Táto definícia je dobrá: $b \in aH \iff b = ah$, $h \in H$

teda $bs = a\underbrace{hs} = as$, teda naozaj každej triede $aH \in G/H$ priradí prvok tvaru $as \in O_s$.

Je to surjektívne: $O_s = \{gs \mid g \in G\}$, teda zjavne $\varphi(gH) = gs$, každý prvok z orbity trafíme.

Injektívnosť: Nech aH a bH sa zobrazia na ten istý prvok, t.j. $as = bs$. Lenže potom $a^{-1}bs = s$, teda $a^{-1}b \in H = G_s$ (stabilizátor s), teda a, b patria do tej istej triedy.

Navyše: φ je kompatibilné s grupovou operáciou (násobenie zľava):

$$\underbrace{\varphi(abH)}_{= abs} = \underbrace{a\,\varphi(bH)}_{= a(bs)}$$

20 Tvrdenie: Nech S je G-množina, s' je prvok orbity s ($s' = as$). Potom:

a) prvky $g \in G$ také, že $gs = s'$ tvoria ľavú triedu

$$a G_s = \{ g \in G \mid g = ah \text{ pre } h \in G_s \}$$

b) stabilizátor s' je konjugovaná podgrupa stabilizátora s

$$G_{s'} = a G_s a^{-1} = \{ g \in G \mid g = aha^{-1} \text{ pre } h \in G_s \}$$

Dôkaz: a) je jasné

b) Nech $gs' = s'$, potom $s = a^{-1}s' = \cancel{a^{-1}bs'} = s$ (t.j. $b \in G_{s'}$)

$a^{-1}gs' = \underbrace{a^{-1}ga}_{\in G_s} s$

teda aj $\cancel{h}a^{-1}s' =$

$h = a^{-1}ga \leftrightarrow g = aha^{-1}$.

Počítacia formula

Tvrdenie: Nech $s \in S$ a S je množina akcie grupou G. Potom

(rád G) = (rád stab)(veľkosť orbity)

$$|G| = |G_s| |O_s|.$$

Resp. index stabilizátora G_s je $|O_s| = [G : O_s]$ (veľkosť orbity).

---

pre každý ~~ok~~ prvok $s \in S$ máme jednu takúto formulku...

→ veľkosť každej orbity delí počet prvkov grupy.

Príklad G - grupa rotácií zachovávajúcich symetrii 12-stena (20)

– Ako zistiť jej veľkosť? stien je 12

Akcia na stenách → stabilizátor steny – rotácie o 72°

• $|G| = 5 \cdot 12 = 60$

• Akcia na vrcholoch (20), tri rotácie fixujú vrchol. $|G| = 3 \cdot 20 = 60$

• Akcia na hranách – Tých je 30, a iba ~~jedna~~ rotá dve rotácie zachovajú hranu.

– Stabilizátor steny

$\mathbb{Z}_5 \leq G$

→ dve orbity po 1 + 2 orbity po 5

$12 = 1+1+5+5$

Permutácie, Symetrická grupa (Podľa ATA ?) (21)

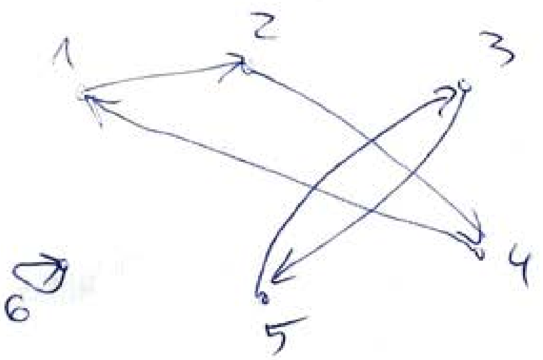
permutácia $\varphi : X \to X$ bijektívne, X konečná

tradične sa zapisuje pomocou dvojriadkovej matice; napr.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

potom akcia φ na 1 je $\varphi(1)=2$. a pod.

Mohli by sme nakresliť obrázok:



Vidíme, že prvky sa po skupinách presúvajú cyklicky. – t.j. ~~ak~~ pozrieme sa na $\{id, \varphi, \varphi^2, \dots\}$ – cyklickú podgrupu generovanú φ (taká musí existovať) a jej akciu na pôvodnej množine $1, 2, \dots n$. → potom sa množina rozpadne na orbity → v našom prípade $\{1,2,4\}$, $\{3,5\}$, $\{6\}$.

potom φ môžme zapísať ako: $(1\,2\,4)(3\,5)(6)$.

(cykly dĺžky 1 sa zvyknú vynechať, preto $id = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$ sa píše ako prázdny zápis),

<u>Def</u> <u>Cyklická permutácia</u> prvkov $a_1, a_2, \dots, a_k$ sa nazýva permutácia μ, ktorá zobrazí $\mu(a_i) = a_{i+1}$ $\begin{pmatrix} \text{v zmysle} \\ \mu(a_k) = a_1 \end{pmatrix}$

značenie $\mu = (a_1 a_2 \dots a_k)$, k sa nazýva <u>dĺžka</u> cyklu.

V príklade máme $\varphi = (124)(35)$.

Potom si môžme všimnúť, že φ sa dá rozložiť do ~~zloženie~~ súčin dvoch cyklických permutácií $\mu_1 = (124)$, $\mu_2 = (35)$ a pritom nezáleží na ich poradí, teda $\varphi = \mu_1 \circ \mu_2 = \mu_2 \circ \mu_1$

Dôvodom je to, že cykly pre μ_1, μ_2 sú disjunktné.

<u>Def</u> Hovoríme, že cykly $(a_1, \dots, a_k)(b_1, \dots, b_e)$ sú disjunktné, ak sú množiny $\{a_1, \dots, a_k\}, \{b_1, \dots, b_e\}$ disjunktné.

<u>Tvrd</u>
- súčin disj. cyklov nezávisí od ich poradia
- každá permutácia sa dá zapísať do súčin disj. cyklov
- rozklad perm. na cykly je jednoznačný až na poradie v rámci cyklov.

<u>D</u>
- ~~Ak~~ sú $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ~~sú~~ navzájom disjunktné cykly, tak každé z μ_i má akciu na disj. množinách, ostatné sú držané na mieste, nezáleží na poradí...
- Postupne vieme vytvoriť cykly sledovaním orbít prvkov vzhľadom na cyklickú grupu $\langle \varphi \rangle$.
- jednoznačnosť dostaneme z toho, že každý prvok a v X je buď fixovaný (cyklus dĺžky 1) alebo patrí práve do 1 z cyklov a rozkladu. Ale ten musí potom vyzerať presne ako $(a, \varphi(a), \dots, \varphi^{k-1}(a))$ pre k - veľkosť orbity a.

Zmena súradníc – konjugácia.

Pri skúmaní normálnych podgrúp sme videli dôležitosť operácie konjugácie: k prvku φ máme $\psi^{-1}\varphi\psi$.

~~povedzme~~ Chceme vedieť aký bude mať rozklad na cykly $\psi^{-1}\varphi\psi$.

Tvrdenie • Ak $\pi=(a_1 a_2 \dots a_k)$ je cyklická permutácia a ψ je ľubovoľná perm. označiac $\psi(a_k)=b_r$, potom konjugovaná permutácia $\psi^{-1}\pi\psi$ je cyklická $(b_1 \dots b_r)$.

• Ak sa φ dá rozložiť do súčin disj. cyklov $\sigma_1 \dots \sigma_e$, potom $\psi^{-1}\varphi\psi$ sa dá rozložiť do $(\psi^{-1}\sigma_1\psi)(\psi^{-1}\sigma_2\psi)\dots(\psi^{-1}\sigma_e\psi)$

• Dve permutácie φ, φ' sú konjugované práve vtedy, ak majú ich rozklady na cykly rovnaké dĺžky cyklov.

D: $(\psi^{-1}\pi\psi)(b_r) = \cancel{\psi^{-1}}\psi b_r\, (\pi\psi)(\underbrace{\psi^{-1}b_r}_{a_r}) = \psi(\underbrace{\pi(a_r)}_{a_{r+1}}) =$

$= b_{r+1}$

• z toho ľahko aj druhá časť, dĺžky cyklov sú rovnaké

• ak φ a φ' majú rovnaké dĺžky cyklov, stačí nájsť permutáciu

$$\begin{matrix} (& &)(&) & (&) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ (& &)(&) & (&) \end{matrix}$$

ktorá ich pošle jeden na druhý...