Zmena súradníc – konjugácia.

pri skúmaní normálnych podgrúp sme videli dôležitosť operácie konjugácie: k prvku φ máme $\psi^{-1}\varphi\psi$.

~~povedzme~~ Chceme vedieť aký bude mať rozklad na cykly $\psi^{-1}\varphi\psi$.

Tvrdenie: • Ak $\pi=(a_1, a_2, \ldots a_k)$ je cyklická permutácia a ψ je ľubovoľná perm. označiac $\psi(a_k)=b_r$, potom konjugovaná permutácia $\psi^{-1}\pi\psi$ je cyklická $(b_1 \ldots b_r)$.

• Ak sa φ dá rozložiť do súčin disj. cyklov $\sigma_1 \ldots \sigma_e$, potom $\psi^{-1}\varphi\psi$ sa dá rozložiť do $(\psi^{-1}\sigma_1\psi)(\psi^{-1}\sigma_2\psi)\ldots(\psi^{-1}\sigma_e\psi)$

• pre permutácie φ, ψ sú konjugované práve vtedy, ak majú ich rozklady na cykly rovnaké dĺžky cyklov. → sem 22.3.

D: $(\psi^{-1}\pi\psi)(b_r) = \cancel{\psi^{-1}} \psi b_r\ (\pi\psi)\underbrace{(\psi^{-1} b_r)}_{a_r} = \psi(\underbrace{\pi(a_r)}_{a_{r+1}}) =$

$= b_{r+1}$

• z toho ľahko aj druhá časť, dĺžky cyklov sú rovnaké

• ak φ a φ' majú rovnaké dĺžky cyklov, stačí nájsť permutáciu

$$\begin{matrix} (& &)(&) & (&) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ (& &)(&) & (&) \end{matrix}$$

ktorá ich pošle jeden na druhý...

Def (Cykly dĺžky 2 sa nazývajú transpozície)

$(i\,j)$ $\quad i<j$

permutácia sa nazýva párna, ak je súčinom párneho počtu transpozícií (tu už nemusíme mať disjunktnosť).

Príklad $(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_1 a_2)(a_2 a_3)(a_3 a_4)\dots(a_{k-1} a_k)$?

resp. $(a_1 a_2)(a_1 a_3)\dots(a_1 a_n)$?

$a_1 \; a_2 \; a_3 \,.\; a_k$

$a_2 \; a_1 \; a_3 \,.\; a_k$

$a_3 \; a_1 \; a_2 \quad a_k$

$\vdots$

$a_k \quad\quad a_{k-1}$

Cykly v A_5

párne

• id	(rádu 1)	$\leftarrow 1$
• $(12)(34)$	(rádu 2)	$\leftarrow 5\cdot 3 = 15$
• (123)	(rádu 3)	$\leftarrow 10\cdot 2 = 20$
• (12345)	(rádu 5)	$\leftarrow 24 = 24$

---

párne

Ale niečo podobné aj pre dvanásť-sten

- stabilizátor (páru) stien $\to$ 4 prvky rádu 5, 6 párov = 24
- stabilizátor (dvojice) vrcholov $\to$ 2 prvky rádu 3, 10 párov
- stabilizátor hrán (dvojice) $\to$ 1 prvok rádu 2, 15 párov

minule sme ale videli, že orbita delí počet prkov grupy

(akcia konjugácie . aha to treba...)

→ Triedová rovnosť:

$$60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12$$

A_5 je jednoduchá, lebo ak N je normálna, tak celá trieda konjugácie patrí do N.

$x \in N \rightarrow g x g^{-1} \in N$!, t.j. $C_x \subseteq N$.

Cieľom bude porozumieť symetriám Platónskych telies. (+ prípadne výlet do vyšších rozmerov? – ~~10 cell~~)

Videli sme, že rotačná grupa symetrií 12-stena (zachovávajúca orientáciu) má 60 prvkov. – stien je 12 (orbita steny)
stabilizátor steny je 5 prvkov
(5 rotácií ↑ $\mathbb{Z}_5$)

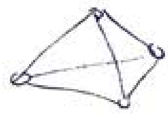
Ak by sme pripustili aj zmenu orientácie, stab steny bude D_{10} – 120 prvkov.

~~Ako zistiť, čo to bude za grupu?~~

Podobne pre kocku máme grupu

Ori.	Neor.
4×6	8×6
$\boxed{24}$	$\boxed{48}$

Pre štvorsten?



– tam to bude pomerne jednoduché, každú permutáciu {1234} vieme reprezentovať transformáciou štvorstena samého na seba ✓

S_4 < 24 celkovo / 12 zachovávajúcich orient.

~~– dalo by sa starostlivo odsledovať transformácie + ich skladanie, identifikovať...~~

Na to, aby sme mohli uspokojivo zodpovedať túto otázku, potrebujeme ešte kúsok teórie.

Bavili sme sa o akcii grupy na množine.
Špeciálne javy dostaneme, ak budeme uvažovať o akcii grupy na sebe samej (resp. na nejakej nadgrupe).

Napríklad: Ľavé násobenie G na sebe.

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, x) \longmapsto gx$$

(g hrá úlohu prvku z G, x je z množiny $M = G$)

Táto akcia je zjavne tranzitívna (t.j. 1 orbita), stabilizátorom každého prvku je iba $\{1\}$ – triviálna jednoprvková podgrupa ($1 \cdot x = x$).

ak sa na ľavé násobenie g pozrieme ako na permutáciu m_g množiny G, máme homomorfizmus:

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow Perm(G). \\ g &\longmapsto m_g \end{aligned}$$

z toho plynie nasl. ~~veta~~ tvrdenie (Cayley)

každá konečná grupa G je izomorfná nejakej podgrupe symetrickej grupy S_n pre $n = |G|$.

Dôkaz ~~...~~ zobrazenie je naozaj homomorfizmus:

$$m_{gh} : x \longrightarrow ghx$$

ale to je $\underset{(m_g \circ m_h)x}{=} m_g(m_h(x)) = g(m_h(x)) = g(h(x)) = (gh)x = m_{gh}x.$

Jeho jadro je iba 1 (lebo iba pre $1 \in G$ dostaneme identit

Preto $\mathrm{Im} \cong G/\ker$, t.j. obraz je izomorfnym obrazom G

Zaujímavejšou akciou G samej na sebe bude akcia konjugáciou

- $(g, x) \longmapsto gxg^{-1}$

- Stabilizátorom prvku x budú: $g \in G$ spĺňajúce

$$x = gxg^{-1}, \quad \text{t.j.} \quad xg = gx$$

- komutujúce prvky s x. — takúto podgrupu nazývame **centralizátor prvku x**

$$Z(x) = \{g \in G : gxg^{-1} = x\} = \{g \in G : gx = xg\}.$$

(všimnúť si: $x \in Z(x)$, lebo každý prvok komutuje sám so sebou.)

$\rightarrow$ t.j. centralizátor je netriviálny, orbita x nebude celé G.

Aká je teda orbita prvku x?

- pozostáva z prvkov v tvare gxg^{-1}, t.j. tých, ktoré sú konjugované s x.

$$C_x = \{ x' \in G : x' = gxg^{-1} \text{ pre } g \in G \}$$

a z formuly:

$$\underbrace{|G|}_{\text{počet prvkov grupy}} = \underbrace{|C_x|}_{\text{orbita}} \underbrace{|Z(x)|}_{\text{stabilizátor}}$$

Navyše vieme, že orbity jednotlivých prvkov x vytvárajú rozklad G.

→ t.j. $|G| = \sum_{\text{konj. triedy}} |C_i| = |C_1| + |C_2| + \dots + |C_k|$

Pre $1 \in G$ máme $C_1 = \{ x' \in G : x' = g 1 g^{-1} \}$, t.j. $C_1 = \{1\}$

Takže máme niečo takéto: čísla na pravej strane delia rád G, aspoň 1 z nich je 1 a súčet dáva $|G|$ — class equation

---

Takže skúsme zistiť, ako to bude v I - rotačnej grupe 12-stena.

pozrime sa na to, aké majú jednotlivé jej prvky rády.

id	−	1	rád 1	
rotácie cez stred steny		5	násobky $2\pi/5$	− 6×4
rotácie cez dva vrcholy		3	násobky $2\pi/3$	− 10×2
rotácie cez stredy strán		2	o π	− 15×1

20 vrcholov, stabilizátor má 3 prvky, ale dva vrcholy majú rovnaký stab.

dostávame $60 = 1 + 15 + 20 + 24$

− t.j. máme všetky prvky grupy.

Táto rovnica sa ponáša na triednu rovnicu, ale nie je to ona, lebo $24 \nmid 60$.

- riešením je zjemniť toto delenie (vráže sa, že na 12 a 12) tak, aby sme už mali konjugačné triedy.

• Pred dvoma týždňami sme si povedali, že stabilizátory jednotlivých prvkov orbít sú konjugované – t.j. všetkých 10 podgrúp rádu 3 a 6 podgrúp rádu 5 je navzájom konjugovaných, podobne 15 podgrúp rádu 2.

Potom uvažujeme prvky ~~v~~ ~~pre~~ stabilizátorov hrán sú konj. ✓

pre rotácie: o $2\pi/3$, $4\pi/3$

: o $2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$, $8\pi/5$

označme rotáciu x (o 120° proti smeru ručičiek)

x^2 (o 240° —"—)

ako zistiť, či sú konjugované? (oriem.)

- treba si uvedomiť, že rotácia o 120° ($\frac{2\pi}{3}$) pre vektor v zodpovedá 240° ($\frac{4\pi}{3}$) rotácii pre protiľahlý vektor v')

Teda $x^2 = x'$ – lenže tieto už sú konjugované vďaka presunu $v \xrightarrow{g} v' \xrightarrow{rot} v' \xrightarrow{g^{-1}} v$

v'

z toho – všetkých 20 rotácií ~~60~~ rádu 3 je konjugovaných.

podobne sa dá nahliadnuť, že rotácie o $2\pi/5$, $-2\pi/5$ a $4\pi/5$, $-4\pi/5$ sú navzájom konjugované.

Preto máme rozklad $60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12$.