Prednáška 3

- (vnútorný) automorfizmus → konjugácia

$$\varphi_b : G \to G \qquad \varphi_b(x) = b x b^{-1}$$

- Normálna podgrupa je fixovaná konjugovaním: $bNb^{-1} = N$ pre $\forall b \in G$
- $\mathrm{Ker}_{\text{pre}}\, \varphi : G \to G'$ je normálnou podgrupou v G

Prednáška 4

- pre podgrupu $H < G$ máme ľavé triedy aH, pravé triedy Ha
- pre normálnu podgrupu $aN = Na$ (súvis s konjugáciou) $(aNa^{-1} = N)$
- ~~veta o faktorovom izomorfizme:~~ ~~$\mathrm{Im}\,\varphi \cong G/\ker\varphi$~~

Prednáška 5

- faktorová grupa G/H (H je normálna)
- každá normálna H sa dá reprezentovať ako jadro $\varphi : G \to G/H$
- veta o faktorovom izomorfizme $\mathrm{Im}\,\varphi \cong G/\ker\varphi$

$H \cong$

- akcie grúp, orbity,

Prednáška 6

- stabilizátor prvku
- $G/\text{stabilizátor} \cong$ orbita (analógia)

na orbite nemáme takúto operáciu

- s a $\tilde{s}$ z tej istej orbity → stabilizátory (podgrupy) H_s a $H_{\tilde{s}}$ sú konjugované

Prednáška 7

- akcia konjugáciou $(g, x) \mapsto g x g^{-1}$
  - stabilizátor → centralizátor
  - orbita → trieda konjugácie

Aká je teda orbita prvku x?
- pozostáva z prvkov v tvare gxg^{-1}, t.j. tých, ktoré sú konjugované s x.

$$C_x = \{ x' \in G : x' = gxg^{-1} \text{ pre } g \in G \}$$

a z formuly:

$$\underset{\text{počet prvkov grupy}}{|G|} = \underset{\text{orbita}}{|C_x|} \, \underset{\text{stabilizátor}}{|Z(x)|}$$

Navyše vieme, že orbity jednotlivých prvkov x vytvárajú rozklad G.

$\to$ t.j. $|G| = \sum_{\text{konj. triedy}} |C_i| = |C_1| + |C_2| + \dots + |C_k|$

Pre $1 \in G$ máme $C_1 = \{ x' \in G : x' = g1g^{-1} \}$, t.j. $C_1 = \{1\}$.

Takže máme niečo takéto: čísla na pravej strane delia rád G, aspoň 1 z nich je 1 a súčet dáva $|G|$ – class equation

---

Takže skúsme zistiť, ako bude v I - rotačnej grupe 12-stena.
pozrime sa na to, aké majú jednotlivé jej prvky rády.

id	– 1 rád 1		
rotácie cez stred steny	5 násobky $2\pi/5$	– 6×4	
rotácie cez dva vrcholy	3 násobky $2\pi/3$	– 10×2	20 vrcholov, stabilizátor má 3 prvky, ale dva vrcholy majú rovnaký stab.
rotácie cez stredy strán	2 o π	– 15×1	

dostávame $60 = 1 + 15 + 20 + 24$
– t.j. máme všetky prvky grupy.

Táto rovnica sa ponáša na triednu rovnicu, ale nie je to ona, lebo $24 \nmid 60$.

- riešením je zjemniť toto delenie (ukáže sa, že na 12 a 12) tak, aby sme už mali konjugačné triedy.

• Pred dvoma týždňami sme si povedali, že stabilizátory jednotlivých prvkov orbít sú konjugované – t.j. všetkých 10 podgrúp rádu 3 a 6 podgrúp rádu 5 je navzájom konjugovaná, podobne 15 podgrúp rádu 2.

Potom uvažujeme prvky ~~v~~ ~~pre~~ stabiliz. v ktorých sú konj. ✓

pre rotácie: o $2\pi/3$, $4\pi/3$ (8)

: o $2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$, $8\pi/5$

označme rotáciu x (o 120° proti smeru ručičiek)

x^2 (o 240° —— // ——)

ako zistiť, či sú konjugované? (oriem.)

- treba si uvedomiť, že rotácia o 120° ($\frac{2\pi}{3}$) pre vektor v zodpovedá 240° ($\frac{4\pi}{3}$) rotácii pre protiľahlý vektor v')

Teda $x^2 = x'$ – lenže tieto už sú konjugované vďaka presunu $v \xrightarrow{g} v' \xrightarrow{rot} v' \xrightarrow{g^{-1}} v$

v'

z toho – všetkých 20 ~~20~~ rotácií ~~60~~ rádu 3 je konjugovaných.

podobne sa dá nahliadnuť, že rotácie o $2\pi/5$, $-2\pi/5$ a $4\pi/5$, $-4\pi/5$ sú navzájom konjugované.

Preto máme rozklad $60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12$.

Tvrdenie Ikosahedrálna grupa I je jednoduchá
(t. j. nemá žiadnu triviálnu normálnu podgrupu)

Lema: a) Ak $N \triangleleft G$ obsahuje prvok x, potom obsahuje aj celú jeho konjugačnú triedu C_x. - t. j. normálna podgrupa je zjednotením konjugačných tried.
b) Rád normálnej podgrupy je súčtom rádov konjugačných tried, ktoré obsahuje.

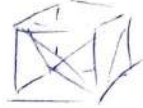
D: a) N je normálna $\iff \forall g \in G, \forall x \in N \quad gxg^{-1} \in N$
t. j. ak $x \in N$ aj $C_x \subseteq N$
b) zjavné.

Pointa teraz je, že žiadne z čísel nedelí 60, čo by rád N mal.

$1+15 = 16$
$1+20 = 21$
$1+15+12 = 38$
$1+12 = 13$
$1+12+12 = 25$
$1+20+12 = 33$
$1+20+15 = 36$

Tvrdenie Ikosahedrálna grupa I je izomorfná alt. grupe A_5.
DÚ 8.3

Na DÚ som chcel dať, ale nedal - nájsť konjugačné triedy v A_5... Tiež by sme videli rozklad na 1, 20, 15, 12, 12...
Sú I a A_5 izomorfné?

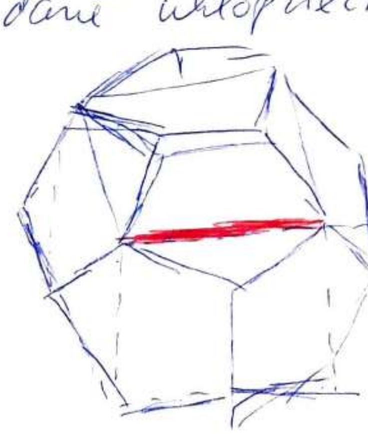
Ukazuje sa, že áno. Ako sme mali v 

kocke 2 štvorsteny (dané uhlopriečkou steny), budeme

mať aj v 12-stene

(Vyrobiť si šablónu
vytlačiť obr.
+ model

vložené kocky -



každá z nich je daná jednou uhlopriečkou v stene. Dohromady máme teda 5 kociek a na ~~tr~~ zach. orientáciu transformácie 12-stena sa môžme pozerať ako na permutácie týchto 5-tich kociek.

~~zjavne~~ Napr. rotácia o 180° okolo stredu steny prevádza:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Rotácia o 120° okolo vrchola

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Rotácia o 72° okolo stredu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Týmto by sme mohli skončiť ...
ale máme aj abstraktnejší argument:
I má akciu na množine kociek, teda máme homomorfizmus

$\varphi: I \to S_5$ (akcia $i \in I$) je určená permutácia $\varphi(i)$

Chceme ukázať, že φ bude izomorfizmus I na $\varphi(I) = A_5$.

Minule sme ukázali, že I je jednoduchá → t.j. $\ker \varphi = \{1\}$ alebo I.
ale zjavne je akcia netriviálna, teda jadro ~~musí~~ môže byť iba $\{1\}$.
→ φ je injektívne a definuje izomorfizmus s $\varphi(I) \subset S_5$.

Vieme, že v S_5 máme podgrupu A_5, daná
(perm) (párne perm)

ako jadro znamienkového homomorfizmu:

$$S_5 \xrightarrow{\text{sign}} \{1,-1\} \qquad A_5 = \ker(\text{sign}).$$

Potom zložením $I \longrightarrow S_5 \longrightarrow \{1,-1\}$ máme homomorfizmus z $I \xrightarrow[\varphi]{\text{do}} \{1,-1\}$. Ak by to bolo surjektívne, tak $I/\ker(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$ ~~by~~ z vety o faktorovom izomorfizme by sme mali 30-prvkovú normálnu podgrupu v I.
$60 \quad 30 \quad 2$

– Ale taká neexistuje. Preto je toto zobrazenie φ triviálne, čo znamená, že všetky permutácie z $\varphi(I)$ sú párne, teda $\varphi(I) = A_5$. ∎

OKRUHY (RINGS)

Motivácia. Celé čísla predstavujú základný model pre pojem okruhu. – Sú uzavreté vzhľadom na sčítanie, odčítanie a násobenie, ale nie nutne vzhľadom na delenie.

Skôr, ako ~~urobíme~~ prejdeme k abstraktnej definícii, pozrime sa na nejaké podokruhy komplexných čísel.

Podokruh $\mathbb{C}$ bude podmnožina uzavretá vzhľadom na ~~násoben~~ sčítanie, odčítanie a násobenie, obsahujúca 1.

Teda všetky podpolia $\mathbb{C}$ budú tiež podokruhmi.

(vie sa čo je pole?)