

Algebra II. – Domáca úloha č. 1

K prednáške 15. februára 2021
Termín odovzdania: 22. február 2021

1. Nájst zovšeobecnenie vrkočovej relácie $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ v tvare $\sigma_i^a \sigma_{i+1}^b \sigma_i^c = \sigma_{i+1}^? \sigma_i^? \sigma_{i+1}^?$, kde a, b, c sú exponenty ± 1 .

Pozn.: Zdá sa, že konvencia označujúca symbolom σ_m prekrížnie prameňov m ponad $m+1$ je opačná, ako som to spravil na prednáške. Na výsledok úlohy by to nemalo mať vplyv.

2. Doplňte tabuľku grupovej operácie \circ pre symetrickú grupu S_3 .

3. Vyjadriť transformácie roviny \mathbb{R}^2 zodpovedajúce preklopeniam τ_{12} , τ_{13} , τ_{23} , otočeniam ρ , ρ^2 a identite id pomocou vhodných matic typu 2×2 . Overiť na pár príkladoch, že spĺňajú vzťahy z príkladu č. 2. (grupová operácia tentoraz bude násobenie matic)

4. Rozhodnúť, ktoré z transformácií roviny τ_{12} , τ_{13} , τ_{23} , id , ρ , ρ^2 zachovávajú, a ktoré menia jej orientáciu. Je nejaký súvis medzi orientáciou a maticami z príkladu č. 3?

5. Označme ako A , B , C body 1 , $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ v komplexnej rovine \mathbb{C} . Zdôvodnite, že trojuholník ABC je rovnostranný. Nájdite transformácie komplexnej roviny zodpovedajúce permutáciám $\rho = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ a $\tau_{23} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$. Pomocou nich opište aj zvyšné permutácie τ_{12} , τ_{13} a ρ^2 . Na pár vybraných príkladoch sa presvedčte, že skladanie týchto transformácií sa správa tak, ako hovorí tabuľka z príkladu č. 2.