

Algebra II. – Domáca úloha č. 11

K prednáške 3. mája 2021
Termín odovzdania: 10. máj 2021

1. Ukážte, že prvok $3 + \sqrt{2}$ je v okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ deliteľom jednotky. Ukážte, že potom aj $(3 + \sqrt{2})^n$ je deliteľom jednotky.
2. (pozri Artin, 10.4.3, str. 382) V okruhu *Gaussových celých čísel* $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ opíšte ideál $(1 + 2i)$. Znázornite jeho prvky v komplexnej rovine.
Aký okruh dostaneme faktorizáciou $\mathbb{Z}[i]/(1 + 2i)$? Čo sa dá povedať o jeho multiplikatívnej štruktúre?
3. Zostrojte podielové polia k oborom integrity a overte, že ide naozaj o polia
$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$
4. (Artin, 11.1.1, str. 440) Nech a, b sú prirodzené čísla, ktorých súčet je prvočíslo p . Ukážte, že a a b sú nesúdeliteľné.
5. (Artin, 11.1.5, str. 440) a) Nech a, b sú prirodzené čísla, $a \neq 0$, a platí $b = aq + r$, kde $0 \leq r < |a|$.
Ukážte, že $\text{nsd}(a, b) = \text{nsd}(a, r)$.
b) Opíšte algoritmus, na základe časti a), na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa.
c) Nájdite $\text{nsd}(1456, 235)$ a $\text{nsd}(123456789, 135792468)$.