

Algebra II. – Domáca úloha č. 2

K prednáške 27. marca 2025
Termín odovzdania: 3. apríl 2025

1. (Artin, 2.1.5, str. 69) Predpokladajme, že v grupe G platí $xyz = 1$. Vyplýva z toho, že $yxz = 1$? Alebo $yxz = 1$?
2. (Artin, 2.2.1, str. 70) Nájsť prvky cyklickej podgrupy generovanej maticou $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
3. (Artin, 2.2.2, str. 70) Nech a, b sú prvky grupy G , prvok a má rád 5 (t.j. $a^5 = 1$) a platí $a^3b = ba^3$. Ukázať, že potom platí aj $ab = ba$, t.j. a, b komutujú.
4. (Artin, 2.2.16, str. 70) (a) Nech G je cyklická grupa rádu 6. Koľké z jej prvkov sú generátormi?
(b) Zodpovedajte takúto otázku pre cyklické grupy rádov 5, 8 a 10.
(c) Koľké z prvkov cyklickej grupy rádu n sú jej generátormi?
5. Ukázať, že grupa kvaterniónov $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ a dihedralná grupa D_8 (grupa symetrií štvorca) nie sú izomorfné.
6. Nájsť tri navzájom neizomorfné abelovské grupy rádu 8.
7. (Artin, 2.4.4, str. 72) Nájdite všetky homomorfizmy $\phi : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, určite ktoré sú injektívne, ktoré surjektívne a ktoré sú izomorfizmy.
8. V S_3 generuje ρ (resp. τ) trojprvkovú podgrupu $R = \{1, \rho, \rho^2\}$ (resp. dvojprvkovú $T = \{1, \tau\}$). Je niektorá z nich normálnou pogrupoú? Dá sa niektorá opísať ako jadro homomorfizmu?