Algebra II. – Domáca úloha č. 7

K prednáške 19. mája 2025
Termín odovzdania: 29. máj 2025

---

1. a) Ukážte, že množina symbolov $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}_3\}$ tvorí pole s deviatimi prvkami, ak zákony binárnych operácií kopírujú sčítanie a násobenie komplexných čísel.
b) Bude podobný postup fungovať pre $\mathbb{Z}_5$? Pre $\mathbb{Z}_7$? Vysvetlite.

2. (Artin, 10.3.29, str. 382) Nech I a J sú ideály v okruhu R. Ukážte na príklade, že $I \cup J$ nemusí byť ideál. Ukážte tiež, že $I + J = \{r \in R \mid r = x + y$, kde $x \in I, y \in J\}$ bude ideál.

3. (Artin, 10.3.30, str. 382) a) Nech I a J sú ideály v okruhu R. Ukážte, že $I \cap J$ je ideál.
b) Ukážte, že $\{r \in R \mid r = xy$, kde $x \in I, y \in J\}$ nemusbyť ideál, ale $IJ = \{\sum r_k \in R \mid r_k = x_k y_k$, kde $x_k \in I, y_k \in J\}$ bude ideál.
c) Ukážte, že $IJ \subseteq I \cap J$.
d) Nájdite také I a J, pre ktoré IJ a $I \cap J$ nebudú rovnaké.

4. (Artin, 10.4.2, str. 382) Nájdite nasledujúce faktorové okruhy: a) $\mathbb{Z}[x]/(x^2+3, 3)$, b) $\mathbb{Z}[x]/(x^2+3, 5)$

5. (Artin, 10.3.3, str. 380) Pre ktoré n delí $x^2 + x + 1$ polynóm $x^4 + 3x^3 + x^2 + 6x + 10$ v $\mathbb{Z}_n[x]$?

6. Ukážte, že prvok $3 + \sqrt{2}$ je v okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ deliteľom jednotky. Ukážte, že potom aj $(3 + \sqrt{2})^n$ je deliteľom jednotky.

7. (pozri Artin, 10.4.3, str. 382) V okruhu *Gaussových celých čísel* $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ opíšte ideál $(1 + 2i)$. Znázornite jeho prvky v komplexnej rovine.
Aký okruh dostaneme faktorizáciou $\mathbb{Z}[i]/(1+2i)$? Čo sa dá povedať o jeho multiplikatívnej štruktúre?

8. Zostrojte podielové polia k oborom integrity a overte, že ide naozaj o polia
$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \qquad \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$