Algebra II. – Domáca úloha č. 8

K prednáške 22. mája 2025
Termín odovzdania: 5. jún 2025

---

1. (Artin, 11.1.1, str. 440) Nech a, b sú prirodzené čísla, ktorých súčet je prvočíslo p. Ukážte, že a a b sú nesúdeliteľné.

2. (Artin, 11.1.5, str. 440) a) Nech a, b sú prirodzené čísla, $a \neq 0$, a platí $b = aq + r$, kde $0 \leq r < |a|$. Ukážte, že $\mathrm{nsd}(a, b) = \mathrm{nsd}(a, r)$.
b) Opíšte algoritmus, na základe časti a), na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa.
c) Nájdite $\mathrm{nsd}(1456, 235)$ a $\mathrm{nsd}(123456789, 135792468)$.

3. (Artin, 11.2.8 a 11.5.3, str. 442, 444) a) Nájdite najväčšieho spoločného deliteľa Gaussových celých čísel $11 + 7i$ a $18 - i$ v $\mathbb{Z}[i]$.
b) Rozložte $6 + 9i$ na Gaussovské prvočísla.

4. (Artin, 11.4.3, str. 443) Rozložte polynóm $x^3 + x + 1$ na ireducibilné členy v $\mathbb{Z}_p[x]$ pre $p = 2, 3, 5$.

5. Ukážte, že okruh $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ nie je Euklidovský.
Pomôcka: Čo sa dá povedať o prvku $2 - \sqrt{3}$?

6. Nech $f(x)$ je ireducibilný polynóm nad poľom F. Dokážte, že $\mathrm{nsd}(f(x), Df(x)) = 1$. ($Df$ označuje deriváciu polynómu f)

7. (Pozri Artin, 11.7.2 a 11.7.5, str. 445, 446) Ukážte, že okruh $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ nie je Euklidovský.
Návod: i) Ukážte, že v $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ môžeme definovať normu,
ii) ukážte, že $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ sú v $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ireducibilné,
iii) ukážte, že v $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ "nefunguje" delenie so zvyškom pre pár 3 a $1 + i\sqrt{5}$.
iv) ukážte, že $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ nie je okruh hlavných ideálov - skúste analyzovať ideál $(3, 1 + \sqrt{5})$.