

1. (Artin, 2.4.5, str. 72) Nech G je abelovská grupa. Ukážte, že zobrazenie umocnenia na n -tú $\phi : G \rightarrow G$ definované ako $\phi(x) = x^n$ je homomorfizmom G samej do seba.

2. (Artin, 2.4.13, str. 72) (a) Nech H je podgrupa grupy G a nech $g \in G$. *Konjugovanou podgrupou* gHg^{-1} nazveme množinu konjugovaných prvkov ghg^{-1} pre $h \in H$. Ukážte, že gHg^{-1} je naozaj podgrupou G .

(b) Ukážte, že podgrupa H je normálnou podgrupou G práve vtedy, keď $gHg^{-1} = H$ pre každé $g \in G$.

3. (Artin, 2.4.19, str. 73) Ukážte, že ak grupa obsahuje práve jeden prvok x rádu 2, potom x patrí do jej centra. *Návod:* Aký je rád gxg^{-1} ?

4. (Artin, 2.5.6, str. 73) (a) Ukážte, že relácia x je konjugované y je reláciou ekvivalencie v grupe G .

(b) Popíšte všetky prvky a , ktorých trieda konjugovanosti (t.j. trieda ekvivalencie) pozostáva iba z prvku a .

5. (Artin, 2.6.7, str. 74) (a) Nech G je abelovská grupa nepárneho rádu. Ukážte, že zobrazenie $\phi : G \rightarrow G$ dané predpisom $\phi(x) = x^2$ je automorfizmus.

(b) Zovšeobecnite výsledok časti a).

6. (Artin, 2.7.1, str. 74) Nech G a G' sú konečné grupy, ktorých rády sú nesúdeliteľné. Ukážte, že jediný homomorfizmus $\phi : G \rightarrow G'$ je iba triviálny – t.j. $\phi(x) = 1$ pre všetky $x \in G$.

7. (Artin, 2.10.7, str. 76) Nájdite všetky normálne podgrupy N grupy kvaternionov $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ a pre každú z nich určite faktorovú grupu H/N .