

1. (Artin, 6.6.16, str. 233) Ukážte, že symetrická grupa  $S_n$  je generovaná dvoma cyklami  $(12 \dots n)$  a  $(12)$ .
2. (Artin, 6.1.1, str. 229) Definuje pravidlo  $(g, x) \mapsto xg^{-1}$  akciu grupy  $G$  samej na sebe? T.j. akcia  $g$  na  $x$  je daná vynásobením inverzom  $g^{-1}$  sprava.
3. (Artin, 6.1.3, str. 229) Dokážte rovnosť  $|G| = |Z| + \sum |C|$ , kde sa sčíta cez konjugčné triedy obsahujúce viac ako jeden prvok a  $Z$  je centrum grupy  $G$ .
4. (Artin, 6.1.6, str. 229) Vylúčte čo najviac možností pre triednu rovnicu grupy rádu 10:  
 $1+1+1+2+5, \quad 1+2+2+5, \quad 1+2+3+4, \quad 1+1+2+2+2+2$   
Pre ktorú z nich viete nájsť reprezentanta?
- 5\*. (Artin, 6.6.17+18+19, str. 233) a) Ukážte, že súčin dvoch cyklov  $(ij)(kl)$  sa dá vždy zapísať ako súčin nejakých 3-cyklov. A to aj v prípade, keď sa niektoré z indexov rovnajú.  
b) Ukážte, že alternujúca grupa  $A_n$  je generovaná trojcyklami pre  $n \geq 3$ .  
c) Ukážte, že ak nejaká normálna (vlastná) podgrupa grupy  $S_n$  obsahuje 3-cyklus, potom to je  $A_n$ .  
d) Ukážte, že  $A_n$  je jednoduchá pre všetky  $n \geq 5$ .
6. (Artin, 6.1.7, str. 229) Nech  $F = \mathbb{Z}_5$ . Určite veľkosť konjugáčnej triedy  $2 \times 2$  matice  $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$  v  $GL_2(\mathbb{F}_5)$ .  
*Návod:* Koľko prvkov má  $GL_2(\mathbb{F}_5)$ ? Ktoré matice komutujú s  $A$ ?
7. (Artin, 6.2.1, str. 230) Nájdite prienik grúp symetrií dvanáststena  $I$  a kocky  $O$ , keď sú vzájomne umiestnené tak, ako na obrázku 2.7. (Artin, 202).
8. Nájdite konjugčné triedy v alternujúcej grupe  $A_5$ .  
*Návod:* Poznáme konjugčné triedy symetrickej grupy  $S_5$  a ich popis pomocou cyklov. Ktoré z nich budú aj konjugáčnymi triedami v  $A_5$ , ktoré sa "rozpadnú", na koľko častí? Aký je rozdiel v "zmene súradníc" v  $S_5$  a  $A_5$ ?