

1. (Artin, 11.1.1, str. 440) Nech a, b sú prirodzené čísla, ktorých súčet je prvočíslo p . Ukážte, že a a b sú nesúdeliteľné.

2. (Artin, 11.1.5, str. 440) a) Nech a, b sú prirodzené čísla, $a \neq 0$, a platí $b = aq + r$, kde $0 \leq r < |a|$. Ukážte, že $\text{nsd}(a, b) = \text{nsd}(a, r)$.

b) Opíšte algoritmus, na základe časti a), na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa.

c) Nájdite $\text{nsd}(1456, 235)$ a $\text{nsd}(123456789, 135792468)$.

3. (Artin, 11.2.8 a 11.5.3, str. 442, 444) a) Nájdite najväčšieho spoločného deliteľa Gaussových celých čísel $11 + 7i$ a $18 - i$ v $\mathbb{Z}[i]$.

b) Rozložte $6 + 9i$ na Gaussovske prvočísla.

4. (Artin, 11.4.3, str. 443) Rozložte polynóm $x^3 + x + 1$ na ireducibilné členy v $\mathbb{Z}_p[x]$ pre $p = 2, 3, 5$.

5. Ukážte, že okruh $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ma nekonečne veľa deliteľov jednotky. Je Euklidovský?

Pomôcka: Čo sa dá povedať o prvku $2 - \sqrt{3}$?

6. Nech $f(x)$ je ireducibilný polynóm nad poľom F . Dokážte, že $\text{nsd}(f(x), Df(x)) = 1$. (Df označuje deriváciu polynómu f)

7. (Pozri Artin, 11.7.2 a 11.7.5, str. 445, 446) Ukážte, že okruh $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ nie je Euklidovský.

Návod: i) Ukážte, že v $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ môžeme definovať normu,

ii) ukážte, že $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ sú v $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ireducibilné,

iii) ukážte, že v $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ “nefunguje” delenie so zvyškom pre pár 3 a $1 + i\sqrt{5}$.

iv) ukážte, že $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ nie je okruh hlavných ideálov - skúste analyzovať ideál $(3, 1 + \sqrt{5})$.