Komplexná analýza II. – Úloha č. 2

Termín odovzdania: 6. október 2010

---

1. Nech C je jednotková kružnica a D jej vnútro, t.j. disk s polomerom 1. Skúmajte, čo sa stane, ak do Cauchyho integrálnej formuly dosadíme funkciu $1/z$, ktorá má pól v nule.

a) Nájdite

$$f(z) = \oint_C \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta, \qquad \text{pre} \quad |z| \neq 1.$$

Návod: Spočítajte reziduá funkcie $1/\zeta(\zeta - z)$ v bodoch 0 a z, alebo použite rozklad $1/\zeta(\zeta - z) = \frac{1}{z}(1/(\zeta - z) - 1/\zeta)$. Osobitne rozoberte prípady, keď $|z| < 1$ a $|z| > 1$.

b) Pre ζ na jednotkovej kružnici platí $1/\zeta = \bar{\zeta}$. Skúste použiť zovšeobecnenú Cauchyho integrálnu formulu pre funkciu $g(z) = \bar{z}$. Odvoďte z toho nasledujúcu rovnosť:

$$-\pi \bar{z} = \int\int_D \frac{dS}{\zeta - z}, \qquad \text{pre} \quad |z| < 1.$$

2. (AF 2.6.8) Nájdite $\bar{\partial}$ (dbar) deriváciu funkcie $z\bar{z}$ (teda r^2). Ukážte, že zovšeobecnená Cauchyho integrálna formula vovnútri kružnice s polomerom R vedie k rovnosti:

$$-\pi \bar{z} = \int\int_{D_R} \frac{dS}{\zeta - z} = \int\int_{D_R} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \equiv I,$$

kde D_R je disk s polomerom R (pozri príklad č. 1; všimnite si, že hodnota integrálu nezávisí od polomeru oblasti R). Overte priamym výpočtom, že táto rovnosť naozaj platí.

Návod: Preveďte integrál I do polárnych súradníc $\zeta = \xi + i\eta = re^{i\theta}$ a nájdite hodnotu

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r\, dr\, d\theta}{re^{i\theta} - z}.$$

Najprv integrujte podľa θ, použitím substitúcie $u = e^{i\theta}$ a $du = ie^{i\theta} d\theta$ máme zámenu integrálov $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \frac{1}{i} \oint_{C_1} f(u) \frac{du}{u}$, kde C_1 je jednotková kružnica. Takéto integrály sa dajú vypočítať pomocou reziduí, resp. integrovaním po malej kružnici okolo pólov ($u = 0$ a $u = z/r$, pozri tiež príklad č. 1, resp. sekciu 2.5 v AF)

Ukážte, že potom

$$I = 2\pi \int_0^R r\, dr \left[-\frac{1}{z} + \frac{1}{z} H\left(1 - \frac{|z|}{r}\right)\right],$$

kde $H(x) = \{1 \text{ ak } x > 0,\ 0 \text{ ak } x < 0\}$ (toto zodpovedá podmienke $z \in D_r$). Z toho odvoďte, že $I = -\pi |z|^2 / z = -\pi \bar{z}$.

3. (AF 2.6.10) V Cauchyho integrálnej formuli zoberme ako integračnú krivku jednotkovú kružnicu okolo nuly. Použitím súradníc $\zeta = e^{i\theta}$ odvoďte

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - z} d\theta,$$

kde z leží vovnútri kružnice. Zdôvodnite, prečo platí

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - 1/\bar{z}} d\theta.$$

Použitím vzťahu $\zeta = 1/\bar{\zeta}$ pre ζ na jednotkovej kružnici ukážte

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta - z} \pm \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right) d\theta.$$

Z toho pre kladné znamienko odvoďte

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \frac{(1 - |z|^2)}{|\zeta - z|^2} d\theta.$$

(a) Dokážte tzv. Poissonovu formulu pre reálnu časť $f(z)$, $\mathrm{Re}\, f = u(r, \phi)$, kde $z = re^{i\phi}$

$$u(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \frac{1 - r^2}{[1 - 2r\cos(\phi - \theta) + r^2]} d\theta,$$

kde $u(\theta) = u(1, \theta)$.

(b) Ak by sme v predchádzajúcej formuli použili záporné znamienko, odvoďte z toho

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \left(\frac{1 + r^2 - 2re^{i(\theta - \phi)}}{1 - 2r\cos(\phi - \theta) + r^2} \right) d\theta$$

a uvažovaním imaginárnej časti

$$v(r, \phi) = C + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \frac{r\sin(\phi - \theta)}{[1 - 2r\cos(\phi - \theta) + r^2]} d\theta,$$

kde $C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(1, \theta) d\theta = v(r = 0)$.

(c) Ukážte, že

$$\frac{2r\sin(\phi - \theta)}{1 - 2r\cos(\phi - \theta) + r^2} = \mathrm{Im} \left(\frac{1 - r^2 + 2ir\sin(\phi - \theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\phi - \theta)} \right)$$
$$= \mathrm{Im} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right),$$

a teda výsledok pre $u(r, \phi)$ a $v(r, \phi)$ z častí (a) a (b) sa dá vyjadriť ako

$$u(r, \phi) = \frac{\mathrm{Re}}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\theta,$$
$$v(r, \phi) = v(0) + \frac{\mathrm{Im}}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\theta.$$

Tento príklad je ilustráciou toho, že predpísanie reálnej časti $f(z)$ (analytickej) pre $|z| = 1$ jednoznačne určuje (a) reálnu časť $f(z)$ vovnútri kružnice a (b) imaginárnu časť $f(z)$ vovnútri kružince až na konštantu. Teda *nemôžeme* ľubovoľne určiť obe – reálnu aj imaginárnu časť analytickej funkcie na hranici $|z| = 1$.

Skúste (bez väčšieho počítania) zistiť akej analytickej funkcii zodpovedá $u(1, \theta) = \mathrm{Re}\,(1/z)$, z úlohy č. 1.