

Komplexná analýza II. – Úloha č. 7

Termín odovzdania: 25. november 2011

- 1.** Priamym výpočtom ukážte, že platí

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Vysvetlite súvislosť s výsledkom príkladu č. 3.

- 2.** (AF str. 226 – 230) Nájdite krivkový integrál

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \pi \cot \pi \zeta \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta, \quad (z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

kde C je hranica obdĺžnikovej oblasti $x \in [-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2}], y \in [-N, N]$ a z je vovnútri tejto oblasti.

Ukážte, že z toho vyplýva

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

- 3.** Ukážte, že platí

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}$$

logaritmickým derivovaním oboch strán a použitím výsledku príkladu č. 2, resp. DÚ 6.

- 4.** (AF 3.6.9) Nech $f(z)$ má jednoduché póly pre $z = z_n \in D_N$, $n = 1, 2, 3, \dots, N$ so silou a_n a je analytická vo zvyšku oblasti D_N . Ukážte, že pre $z \in D_N$ platí

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{z_n - z},$$

kde C_N je hranica oblasti D_N .

Odvoďte, odpočítaním hodnoty pre $z = 0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = f(z) - f(0) + \sum_{n=1}^N a_n \left(\frac{1}{z_n - z} - \frac{1}{z_n} \right).$$

Ukážte, že z ohraničenosťi $f(z)$ pre veľké z dostaneme pre kruhovú oblasť D_N s polomerom R_N na pravej strane nulu, ked $R_N \rightarrow \infty$.

Podobne nájdite príslušný krivkový integrál, ktorý dá

$$f(z) - f(0) - zf'(0) - \dots - \frac{z^k f^{(k)}(0)}{k!} + \sum_{n=1}^N a_n \left(\frac{1}{z_n - z} - \frac{1}{z_n} - \frac{z}{z_n^2} - \dots - \frac{z^k}{z_n^{k+1}} \right).$$

Aká je postačujúca podmienka na $f(z)$ pre veľké z aby sa v limite $R_N \rightarrow \infty$ krivkový integrál na ľavej strane vynuloval? T.j. ako sa má správať $f(z)$ rodu k ?

Pozn. Členy, ktoré sme tu do sumy čiastočných zlomkov vkladali sú práve opravné členy z Mittag-Lefflerových rozkladov.