Komplexná analýza II. – Úloha č. 8

Termín odovzdania: 1. december 2011

---

1. a) Ukážte, že Taylorov rozvoj $\frac{z}{e^z-1}$ v nule má tvar

$$1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Koeficienty B_k sa nazývajú Bernoulliho čísla. Nájdite B_1, B_2, B_3.

b) Nájdite Taylorov rozvoj $\tan z$ a Laurentov rozvoj $\cot z$ v nule pomocou Bernoulliho čísel.

Návod:

$$z\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = 2\frac{z}{e^z - 1} + z$$

Otvorená časť úlohy – naštudujte si niečo o Bernoulliho čislach (kombinatorický význam, iné vzorce, ktoré spĺňajú) a dajte so súvisom s Taylorovým rozvojom $\frac{z}{e^z-1}$. Spíšte, povedzte spolužiakom, resp. odreferujte v januári.

Odrazový bod: `http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number`.

2. Podobne ako v príklade č. 4 z DÚ 6 ukážte

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 2^{2k-1} \frac{B_k}{(2k)!} \pi^{2k}.$$

3. Dokážte Gaussovu formulu:

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(z) = n^{z-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{n}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right).$$

4. Aké sú reziduá $\Gamma(z)$ v póloch $z = -n$?