Komplexná analýza II. – Úloha č. 9

Termín odovzdania: 19. december 2011

---

1. Ukážte (pomocou reziduí), že

$$C_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \eta^{2n-2}\log\frac{1}{1-e^{2\pi\eta}}d\eta = (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)2n}B_n,$$

kde C_n je člen z asymptotického rozvoja zvyšku $J(z)$ zo Stirlingovej formuly a B_n je Bernoulliho číslo.

2. (AF str. 412) Pomocou integrovania per partes ukážte, že pre integrál

$$I(\varepsilon) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+\varepsilon t}dt, \qquad \varepsilon > 0$$

platí

$$I(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + 2!\varepsilon^2 - 3!\varepsilon^3 + \cdots + (-1)^N N! e^N + (-1)^{N+1}(N+1)!\varepsilon^{N+1}\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+\varepsilon t)^{N+2}}dt.$$

Ukážte, že posledný člen je veľkosti $o(N!\varepsilon^N)$.

3. (AF str. 420-421) Ukážte, že pre integrál $I(k) = \int_k^\infty e^{-t^2}dt$, pre $k \to \infty$ platí

$$I(k) = \frac{e^{-k^2}}{2k} - \frac{e^{-k^2}}{4k^3} + O\left(\frac{e^{-k^2}}{k^5}\right).$$

Ako by vyzerali ďalšie členy v asymptotickom rozvoji? Ako sa dá ohraničiť zvyšok? Pozri tiež AF 6.1.4.

4. (AF str. 420-421) Ukážte, že pre integrál $I(k) = \int_0^k t^{-1/2}e^{-t}dt$ pre $k \to \infty$ platí

$$I(k) = \sqrt{\pi} - \frac{e^{-k}}{\sqrt{k}} + \frac{2e^{-k}}{\sqrt{k^3}} + O\left(\frac{e^{-k}}{k^{5/2}}\right).$$

Ako by vyzerali ďalšie členy v asymptotickom rozvoji? Ako sa dá ohraničiť zvyšok? Pozri tiež AF 6.1.4.

Doplnok k 4. a 5. (ak bude čas a chuť) Ako presný je takýto odhad tzv. chybovej funkcie $\mathrm{erf}(k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^k e^{-t^2}dt$? T.j. pre aké k_n mi stačí prvých n členov asymptotického rozvoja na odhad $\mathrm{erf}(k)$ (resp. 1 - $\mathrm{erf}(k)$) s presnosťou na (povedzme) tri platné číslice?