Komplexná analýza II. – Úloha č. 3

Termín odovzdania: 9. október 2012

---

1. (AF 4.3.1) a) Použite integrál hlavnej hodnoty na výpočet

$$\int_0^\infty \frac{\cos kx - \cos mx}{x^2} dx = \frac{-\pi}{2}(|k| - |m|), \qquad \text{pre}\, k, m\, \text{reálne}.$$

b) Nech $k = 2$ a $m = 0$, odvoďte

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dal by sa tento integrál vypočítať aj nejako inak?

2. (podľa AF 4.3.5) Uvažujme Cauchyho integrálnu funkciu

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

kde C je nejaká krivka, podobne

$$F^{\pm}(\zeta_0) = \lim_{z \to \zeta_0^{\pm}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right],$$

pre ζ_0 ležiace na krivke C, pričom plus–mínus limity označujú limity pre z prichádzajúce k ζ_0 zľava–sprava. Nájdite priamym výpočtom a aj pomocou teórie z prednášky $F^{\pm}(\zeta_0)$ pre $f(\zeta) = 1/(\zeta^2 + 1)$ a C reálnu os $(-\infty, \infty)$.

3. (podľa AF 4.3.15) V predchádzajúcej DÚ sme odvodili vzorec

$$v(r, \phi) = v(r = 0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \frac{2r \sin(\phi - \theta)}{[1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2]} d\theta,$$

kde $u(\theta)$ je zadaná na jednotkovej kružnici a $v(r, \phi)$ je harmonicky združená funkcia k $u(r, \phi)$. Nech $\zeta = re^{i\phi}$. Ukážte, že limitovaním pre $r \to 1$ dostaneme

$$v(\phi) = v(r = 0) - \frac{1}{2\pi i} ⨍_0^{2\pi} u(\theta) \frac{e^{i\phi} + e^{i\theta}}{e^{i\phi} - e^{i\theta}} d\theta,$$

čo sa dá upraviť na

$$v(\phi) = v(r = 0) + \frac{1}{2\pi} ⨍_0^{2\pi} u(\theta) \cot\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right) d\theta.$$

Tento vzorec pre analytickú funkciu $f(z) = u + iv$ vo vnútri jednotkovej kružnice udáva vzťah medzi reálnymi a imaginárnymi hodnotami na hranici.

Skúste overiť výpočtami čo by sme dostali, ak by sme podobnú limitu $(r \to 1)$ spočítali pre

$$u(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \frac{1 - r^2}{[1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2]} d\theta.$$

4. (AF 7.2.4) Ukážte, že zmeny súradníc

$$z = \frac{t - i}{t + i}, \qquad \text{a} \qquad \zeta = \frac{\tau - i}{\tau + i}$$

prevádzajú integrál Cauchyho typu po reálnej osi v komplexnej rovine t, τ

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

na integrál Cauchyho typu po jednotkovej kružnici v rovine z, ζ

$$F(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Pozn. presnejšie by malo byť $F(z) = ⨍_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, s problematickým bodom $\zeta = 1$.

5. (AF 7.2.5) Uvažujme integrál

$$U(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta,$$

kde u je reálna funkcia. Takýto integrál sa zvykne nazývať integrál Schwarzovho typu. Odvoďte vzťah medzi integrálmi Cauchyho a Schwarzovho typu

$$U(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{2u(-i\log\tau)}{\tau-z}d\tau-\int_0^{2\pi}u(\theta)d\theta,$$

kde C označuje jednotkovú kružnicu.

(pozrite tiež príklad 7.2.6 a súvis s Poissonovou formulou)