Komplexná analýza II. – Úloha č. 7

Termín odovzdania: 2. december 2014

---

1. Priamym výpočtom ukážte, že platí

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Vysvetlite súvislosť s výsledkom príkladu č. 3.

2. (AF str. 226 – 230) Nájdite krivkový integrál

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \pi\cot\pi\zeta\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\zeta-z}\right)d\zeta,\qquad (z\neq 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\dots),$$

kde C je hranica obdĺžnikovej oblasti $x\in[-N-\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}]$, $y\in[-N,N]$ a z je vovnútri tejto oblasti.

Ukážte, že z toho vyplýva

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right).$$

3. Ukážte, že platí

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}$$

logaritmickým derivovaním oboch strán a použitím výsledku príkladu č. 2, resp. DÚ 6.

4. (AF 3.6.9) Nech $f(z)$ má jednoduché póly pre $z=z_n\in D_N$, $n=1,2,3,\dots,N$ so silou a_n a je analytická vo zvyšku oblasti D_N. Ukážte, že pre $z\in D_N$ platí

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)+\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{z_n-z},$$

kde C_N je hranica oblasti D_N.

Odvoďte, odpočítaním hodnoty pre $z=0$,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N}\frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta=f(z)-f(0)+\sum_{n=1}^{N}a_n\left(\frac{1}{z_n-z}-\frac{1}{z_n}\right).$$

Ukážte, že z ohraničenosti $f(z)$ pre veľké z dostaneme pre kruhovú oblasť D_N s polomerom R_N na pravej strane nulu, keď $R_N\to\infty$.

Podobne nájdite príslušný krivkový integrál, ktorý dá

$$f(z)-f(0)-zf'(0)-\dots-\frac{z^k f^{(k)}(0)}{k!}+\sum_{n=1}^{N}a_n\left(\frac{1}{z_n-z}-\frac{1}{z_n}-\frac{z}{z_n^2}-\dots-\frac{z^k}{z_n^{k+1}}\right).$$

Aká je postačujúca podmienka na $f(z)$ pre veľké z aby sa v limite $R_N\to\infty$ krivkový integrál na ľavej strane vynuloval? T.j. ako sa má správať $f(z)$ rodu k?

Pozn. Členy, ktoré sme tu do sumy čiastočných zlomkov vkladali sú práve opravné členy z Mittag–Lefflerových rozkladov.