Komplexná analýza II. – Úloha č. 8

Termín odovzdania: 9. december 2014

---

1. (Stein, Shakarchi, str. 118–119) Dokážte Poissonovu formulu

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Návod: Použitím reziduí ukážte

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1}dz - \int_{L_2} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1}dz,$$

kde L_1, L_2 sú priamky získané posunutím reálnej osi nahor a nadol o vhodné b. Použite rovnosť $\frac{1}{w-1} = w^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} w^{-n}$ pre $|w| > 1$, a $\frac{1}{w-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ pre $|w| < 1$ na to, aby ste vyjadrili integrály pozdĺž L_1 a L_2 ako súčty členov tvaru $\hat{f}(n)$.

2. Theta funkcia je definovaná pre $t > 0$ ako $\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$. Použitím Poissonovej formuly pre $e^{-\pi t x^2}$ odvoďte funkcionálnu rovnicu

$$\vartheta(t) = t^{-1/2}\vartheta(1/t), \qquad \text{pre } t > 0.$$

Návod: Začnite s Fourierovou transformáciou $e^{-\pi x^2}$ a spravte zmenu premennej $x \mapsto t^{1/2}(x+a)$.

3. Ukážte, že pre $\mathrm{Re}(s) > 1$ máme

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx.$$

Návod: Použite $1/(e^x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

4. (Stein, Shakarchi, 6.16, str. 178–179) Rozpísaním

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{1} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$$

pre $\mathrm{Re}(s) > 1$, ukážte, že druhý integrál definuje celú funkciu, zatiaľ čo

$$\int_0^{1} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!(s+m-1)},$$

kde B_m označuje m-té Bernoulliho číslo. Tie sú definované pomocou

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!}x^m.$$

Keďže $z/(e^z-1)$ je holomorfná pre $|z| < 2\pi$, odvoďte $\limsup_{m\to\infty} |B_m/m!|^{1/m} = 1/2\pi$ a skúmajte analytické pokračovanie prvého integrálu predelené $\Gamma(s)$ pre $\mathrm{Re}(s) \le 1$.

5. Podobne ako v Príklade č. 4 v DÚ č. 6 ukážte

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 2^{2k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k}.$$

Návod: Nájdite Taylorov rozvoj $\tan(z)$ pre $z = 0$ použitím Bernoulliho čísel.