

(AF) bude znamenať odkaz na knižku M. Ablowitza a A. Fokasa; uvedené bude spravidla číslo príkladu (kapitola.sekcia.príklad), alebo číslo strany, kde sa o danej veci píše.

1. (AF s. 34 - 35) (10 bodov) Odvoďte Cauchy-Riemannove rovnice pre polárne súradnice r a θ :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

2. (10 bodov) Ukážte, že pre analytickú funkciu F platí

$$\int_C F'(z) dz = F(b) - F(a),$$

kde a a b sú začiatkový a koncový bod krivky C .

Porovnajte s výsledkom

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{s} = f(b) - f(a),$$

pre krivkový integrál gradientu skalárnej funkcie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Takáto funkcia f sa zvykne nazývať *potenciál* vektorového poľa ∇f .

3. (AF 2.5.4, 2.6.1) (10 bodov) Nájdite hodnoty integrálov

$$a) \oint_C \frac{e^{z^2}}{z^2} dz, \quad b) \oint_C \frac{e^z}{z} dz,$$

kde C je jednoduchá uzavretá krivka obiehajúca okolo počiatku. V prípade potreby použite Taylorov rozvoj funkcie e^z .

Skúste nájsť riešenie, ktoré nepoužíva Cauchyho formulu.

4. (AF 2.5.5) (10 bodov) Chceme nájsť ohodnotenie integrálu $I = \int_0^\infty e^{ix^2} dx$. Uvažujte krivkový integrál $I_R = \oint_{C(R)} e^{iz^2} dz$, kde $C(R)$ je uzavretá kruhová výseč v hornej polrovine s hraničnými bodmi 0 , R a $Re^{i\pi/4}$. Ukážte, že $I_R = 0$, a že limita $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1(R)} e^{iz^2} dz = 0$, kde $C_1(R)$ je krivkový integrál po časti kružnice z R do $Re^{i\pi/4}$. Použite potom fakt, že $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ na odvodenie $I = e^{i\pi/4} \sqrt{\pi}/2$.

5. (AF 2.6.3) (10 bodov) Nájdite ohodnotenie integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+i)^2} dx$$

uvažovaním $\oint_{C(R)} (1/(z+i)^2) dz$, kde $C(R)$ je uzavretá polkružnica v hornej polrovine s rohmi $z = -R$ a $z = R$ spojenými x -ovou osou.

Zmenilo by sa niečo, ak by sme integrovali po polkružnici v dolnej polrovine? Skúste tiež porovnať váš výsledok s faktom, že $(-1/(z+i))' = 1/(z+i)^2$.

6. (10 bodov) Predpokladajme, že funkcie f a g sú analytické vo vnútri a na hranici jednotkovej kružnice. Navyše predpokladajme, že na hranici majú rovnaké hodnoty, t.j. $f(z) = g(z)$ pre $|z| = 1$. Ukážte, že potom $f \equiv g$.