Komplexná analýza II. – Úloha č. 5

Termín odovzdania: 6. november 2019

---

1. (AF 3.5.4) *(10 bodov)* Skúmajte analytické rozšírenie funkcie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}, \qquad \text{definovanej Taylorovým radom pre } |z| < 1.$$

2. *(10 bodov)* Ukážte, že pre nasledujúce nekonečné súčiny platí:

$$\text{a) } \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3},$$

$$\text{b) } \prod_{n=2}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{2}{\pi}.$$

V časti b) vlastne ide o Vietov súčin, ktorý bol spomenutý na prednáške:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

3. (AF str. 162) *(10 bodov)* Ukážte, že funkcia daná nekonečným súčinom

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

bude analytická pre každe $z \in \mathbb{C}$ – teda ide o *celú* funkciu. Kde bude mať nulové body?

Ukážte tiež, že nekonečný súčin

$$H(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right)$$

diverguje pre každé $z \neq 0$.

Návod: Použite fakt, že $\lim_{w \to 0} \frac{\ln(1+w)}{w} = 1$.

4. (AF 3.6.1) *(10 bodov)* Zistite pre ktoré $z \in \mathbb{C}$ nasledujúce nekonečné súčiny konvergujú; v prípadoch c) a d) nájdite aj ich hodnoty:

$$\text{a) } \prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^n), \qquad \text{b) } \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{z^n}{n!}\right),$$

$$\text{c) } \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + z^{2^n}\right), \qquad \text{d) } \prod_{n=1}^{\infty} \left((1 + z^n)(1 - z^{2n-1})\right).$$