Komplexná analýza II. – Úloha č. 1

Termín odovzdania: 29. september 2022

(AF) bude znamenať odkaz na knižku M. Ablowitza a A. Fokasa; uvedené bude spravidla číslo príkladu (kapitola.sekcia.príklad), alebo číslo strany, kde sa o danej veci píše.

1. (AF s. 34 - 35) *(10 bodov)* Odvoďte Cauchy-Riemannove rovnice pre polárne súradnice r a θ:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

2. *(10 bodov)* Ukážte, že pre analytickú funkciu F platí

$$\int_C F'(z)dz = F(b) - F(a),$$

kde a a b sú začiatočný a koncový bod krivky C.

Porovnajte s výsledkom

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{s} = f(b) - f(a),$$

pre krivkový integrál gradientu skalárnej funkcie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Takáto funkcia f sa zvykne nazývať *potenciál* vektorového poľa ∇f.

3. (AF 2.5.4, 2.6.1) *(10 bodov)* Nájdite hodnoty integrálov

$$a) \quad \oint_C \frac{e^{z^2}}{z^2} dz, \qquad b) \quad \oint_C \frac{e^z}{z} dz,$$

kde C je jednoduchá uzavretá krivka obiehajúca okolo počiatku. V prípade potreby použite Taylorov rozvoj funkcie e^z.

Skúste nájsť riešenie, ktoré nepoužíva Cauchyho formulu.

4. (AF 2.5.5) *(10 bodov)* Chceme nájsť ohodnotenie integrálu $I = \int_0^\infty e^{ix^2} dx$. Uvažujte krivkový integrál $I_R = \oint_{C_{(R)}} e^{iz^2} dz$, kde $C_{(R)}$ je uzavretá kruhová výseč v hornej polrovine s hraničnými bodmi 0, R a $Re^{i\pi/4}$. Ukážte, že $I_R = 0$, a že limita $\lim_{R\to\infty} \int_{C_{1(R)}} e^{iz^2} dz = 0$, kde $C_{1(R)}$ je krivkový integrál po časti kružnice z R do $Re^{i\pi/4}$. Použite potom fakt, že $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ na odvodenie $I = e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}/2$.

5. (AF 2.6.3) *(10 bodov)* Nájdite ohodnotenie integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+i)^2} dx$$

uvažovaním $\oint_{C_{(R)}} (1/(z+i)^2) dz$, kde $C_{(R)}$ je uzavretá polkružnica v hornej polrovine s rohmi $z = -R$ a $z = R$ spojenými x-ovou osou.

Zmenilo by sa niečo, ak by sme integrovali po polkružnici v dolnej polrovine? Skúste tiež porovnať váš výsledok s faktom, že $(-1/(z+i))' = 1/(z+i)^2$.

6. *(10 bodov)* Predpokladajme, že funkcie f a g sú analytické vovnútri a na hranici jednotkovej kružnice. Navyše predpokladajme, že na hranici majú rovnaké hodnoty, t.j. $f(z) = g(z)$ pre $|z| = 1$. Ukážte, že potom $f \equiv g$.