Komplexná analýza II. – Úloha č. 4

Termín odovzdania: 27. október 2022

---

1. (AF 7.4.1) *(10 bodov)* Nech C je konečná uzavretá krivka a $f(t)$ na nej spĺňa Hölderovskú podmienku.

a) Ukážte, že riešením singulárnej integrálnej rovnice

$$\frac{1}{\pi i}\fint_C \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t)$$

je funkcia

$$\phi(t) = \frac{1}{\pi i}\fint_C \frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau.$$

b) Použite časť a) na odvodenie tzv. Poincarého–Bertrandovho vzorca

$$f(t) = -\frac{1}{\pi^2}\fint_C \frac{d\tau}{\tau - t}\left(\fint_C \frac{f(\tau')}{\tau' - \tau}d\tau'\right).$$

2. (AF 7.4.2) *(10 bodov)* Pre funkciu $f(x)$ s vhodným klesajúcim správaním pre $x \to \pm\infty$ definujme jej Hilbertovu transformáciu ako

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi}\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - x}d\xi.$$

a) Pomocou príkladu č. 1 ukážte, že v priestore s vhodným limitným klesajúcim správaním platí $H(Hf(x)) = -f(x)$. (Čo sa dá zapísať aj ako $H^2 = -I$)

b) Ukážte, že funkcie

$$\Phi^+(x) = f(x) - i(Hf)(x) \qquad \text{a} \qquad \Phi^-(x) = f(x) + i(Hf)(x)$$

sú limitnými hodnotami analytických funkcií v hornej a dolnej komplexnej polrovine. Použite tento fakt na odvodenie

$$H[fHg + gHf] = -fg + H(f)H(g).$$

Pozn. Hilbertova transformácia sa dá chápať aj ako určitý druh konvolúcie funkcií $f(x)$ a $1/x$.

3. (podľa AF, str. 549) *(10 bodov)* a) Ukážte, že ak $\Phi^+(z)$ je analytická v hornej polrovine, potom $\Phi^-(z)$ definovaná predpisom

$$\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+(\bar{z})}$$

je analytická v dolnej polrovine.

b) Pre hornú polrovinu chceme nájsť podobný predpis akou bola v predošlých d.ú. Poissonova formula pre vnútro jednotkovej kružnice. T.j. hľadáme $\Phi^+(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analytickú v hornej polrovine tak, aby na hranici (reálnej osi) platilo $\operatorname{Re}\Phi^+(x) = u(x,0) = f(x)$ pre $x \in \mathbb{R}$. Tiež nás bude zaujímať vzťah s $\operatorname{Im}\Phi^+(x) = v(x,0) = g(x)$.

Použijúc definíciu $\Phi^-(z)$ z časti a) ukážte, že $\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = 2u(x,0) = 2f(x)$ a $\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 2iv(x,0) = 2ig(x)$ pre $x \in \mathbb{R}$. Z toho pomocou Plemeljových vzorcov nájdite vyjadrenie $\Phi^+(z)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ a $f(x)$ pomocou $g(x)$.

c) Zvoliac $\Psi^+(z) = \Phi^+(z)$ a $\Psi^-(z) = -\Phi^-(z)$, dostaneme $\Psi^+(x) + \Psi^-(x) = 2iv(x,0) = 2ig(x)$ a $\Psi^+(x) - \Psi^-(x) = 2u(x,0) = 2f(x)$. Z toho pomocou Plemeljových vzorcov nájdite vyjadrenie $\Psi^+(z)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ a $g(x)$ pomocou $f(x)$.

d) Stručne vysvetlite súvis $f(x)$, $g(x)$ a Hilbertovej transformácie (pozrite tiež príklad 2b)

4. *(10 bodov)* Nájdite hodnotu integrálu

$$\widehat{\mathrm{rec}}(k) = \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x}dx, \qquad \text{pre } k \in \mathbb{R}.$$

Návod: použite $e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx)$, čím sa úloha zredukuje na výpočet $\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}dx$, str. 240 v AF.

Pozn. Funkcia $1/x$ nie je integrovateľná (nekonečná L_1 norma), ani nemá konečnú L_2 normu. Napriek tomu môžeme pomocou vyššieuvedeného singulárneho integrálu definovať jej "Fourierovu transformáciu".